PROBABILITES

Chap 1 :

ELEMENTS DE BASE DE L'ETUDE DES PROBABILITES

I. Triplet de probabilité $(\mathcal{E}, \mathcal{C}, P)$

. $\mathcal{E}$ l'ensemble des résultats d'experience

exemples : jet d'une pièce : $\mathcal{E} = \{pile, face\}$

jet d'un dé : $\mathcal{E} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$\mathcal{E} = \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{R}^n \dots$

. $\mathcal{C}$ l'ensemble des evenement, qui doit satisfaire les propriétés suivante.

① $\mathcal{C} \subset P(\mathcal{E})$ ensemble des parties de $\mathcal{E}$ ie l'ens de tt les ss ensembles de $\mathcal{E}$.

ex : $\mathcal{E} = \{pile, face\}$, $P(\mathcal{E}) = \{\{pile\}, \{face\}, \mathcal{E}, \phi\}$

② $\mathcal{E} \in \mathcal{C}$. $\mathcal{E}$ evenement certain

③ Si $A \in \mathcal{C}$, alors $\overline{A} = C_{\mathcal{E}} A \in \mathcal{C}$

$\overline{A}$ evenement contraire de A

④ Si $(A_i)_{i \in I}$, (I fini ou dénombrable) est un ensemble d'éléments de $\mathcal{C}$, ie $A_i \in \mathcal{C}$ $\forall i \in I$, alors $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{C}$

exemples : jet d'1 pièce : $\mathcal{C} = \{\mathcal{E}, \phi\}$ présente peu d'intérêt

$\mathcal{C} = \{\mathcal{E}, \phi, \{pile\}, \{face\}\} = P(\mathcal{E})$ retenu ds toutes les applicat°

jet d'1 dé : $\mathcal{C} = \{\mathcal{E}, \phi\}$ BOF !

$\mathcal{C} = \{\mathcal{E}, \phi, \underbrace{\{2,4,6\}}_{\text{evenement "pair"}}, \underbrace{\{1,3,5\}}_{\text{evenement "impair"}}\}$

$\mathcal{C} = P(\mathcal{E}) = \{\mathcal{E}, \phi, \{1\}, \{2\}, \dots$
$\{1,2\}, \{1,3\}, \dots$
$\{1,2,3\}, \dots$
$\dots \}$

modélisat° plus précise et sut + utile :

en g^{al} on choisit $\mathcal{C} = P(\mathcal{E})$

Propriétés de $\mathcal{C}$: $\boxed{\phi \in \mathcal{C}}$ $\boxed{\bigcap_{i \in I} A_i \in \mathcal{C} \text{ fini ou dénombrable}}$

. P "probabilité" est une application de $\mathcal{C}$ dans $[0,1]$

$$P : \mathcal{C} \longrightarrow [0,1]$$
$$A \longrightarrow P(A)$$

qui verifie les propriétés suivantes :

$P(\Omega) = 1$

$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

$P(\bigcup_{i \in I} A_i) = \sum_{i \in I} P(A_i)$ si les événements A_i sont disjoints
i.e. $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$

On a alors :
$$\boxed{\begin{array}{l} P(\emptyset) = 0 \\ \text{si } A \subset B \text{ alors } P(A) \leq P(B) \\ P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \end{array}}$$

Vocabulaire :
- si $a \in \Omega$, alors $\{a\}$ est un événement élémentaire
- si $\Omega = \bigcup_{i \in I} A_i$ avec $A_i \cap A_j = \emptyset$, on dit que l'ensemble des A_i est un système complet d'événements
- $(\Omega, \mathcal{C})$ espace probabilisable
  $\mathcal{C}$: tribu ou σ-algèbre
  $(\Omega, \mathcal{C}, P)$ espace probabilisé

I. Equiprobabilité - Dénombrement

Définition : lorsque | Ω est fini
| on ne veut privilégier aucun événement (équiprobabilité)
élémentaire

on définit P de la façon suivante :

$$P : \begin{array}{l} \mathcal{C} \longrightarrow [0,1] \\ A \longmapsto P(A) = \dfrac{\operatorname{card} A}{\operatorname{card} \Omega} \end{array} \quad \left(\dfrac{\text{nb de cas favorables}}{\text{nb de cas possibles}} \right)$$

(d'où dénombrement)

exemples : ① jet d'1 dé : $P(\{2,4,6\}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$P(\{2\}) = \frac{1}{6}$

② Tirages avec remise dans une urne à deux catégories.

○ b
● r
$r + b = N$
nb total de boules

Pb : on effectue n tirages (avec remise)
on recherche P_k la probabilité d'avoir k boules blanches sur ces n tirages avec $0 \leq k \leq n$

$\boxed{\Omega}$

$B_1 \dots B_b$
$R_1 \dots R_r$

• Ω est l'ensemble des suites de n éléments pris dans $\{B_1, \dots, B_b, R_1 \dots R_r\}$ avec éventuelle répétition et ordre ex : $n=3$ $\{B_1, R_2, B_1\}$ possible $\neq \{R_2, B_1, B_1\}$

- $\mathcal{E} = P(\mathcal{X})$ Rq : A_k l'evenement "k boules blanches" $\in \mathcal{E}$.
- $\boxed{P_k = P(A_k) = \dfrac{\text{card } A_k}{\text{card } \mathcal{X}}}$

$\boxed{\text{Card } \mathcal{X} = N^n}$

$\boxed{\text{Card } A_k = ?}$ ⊛ suites de la forme $\underbrace{B_1 B_2 \ldots B_1}_{k \text{ BB}} \underbrace{R \ldots}_{n-k \text{ BR}}$: $\boxed{b^k r^{n-k}}$

⊛ suites de la forme $\underbrace{R_1 \ldots R_2}_{n-k} \underbrace{B_2 \ldots B_1}_{k}$: $\boxed{b^k r^{n-k}}$

etc...

Conclusion : $\boxed{\text{Card } A_k = b^k r^{n-k} \underbrace{C_n^k}_{\substack{\text{nb d'emp.} \\ \text{poss. pr boules blanches}}}}$.

Conclusion : $P_k = P(A_k) = \dfrac{C_n^k b^k r^{n-k}}{N^k N^{n-k}} = C_n^k \left(\dfrac{b}{N}\right)^k \left(\dfrac{r}{N}\right)^{n-k}$

on pose $p = \dfrac{b}{N}$ probabilité du "succès" sur 1 experience

$q = \dfrac{r}{N} = 1 - \dfrac{b}{N} = 1 - p$ probabilité de l'"echec" sur 1 experience.

LOI BINOMIALE $\boxed{P(k \text{ succès sur } n \text{ experiences identiques et indépendantes}) = C_n^k p^k q^{n-k}}$

exercice : n tirages sans remise. $P(A_k) = \dfrac{C_b^k C_r^{n-k}}{C_N^n}$ ~~$k \in \{0, \ldots, n\}$~~

loi hypergéometriq peu utilisée.

Rq : $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ $\boxed{\max(0, n-r) \leq k \leq \min(n, b)}$

III. Probabilites conditionnelles

1. Definition

La probabilité d'un evenement A sachant B (ou proba de A conditionnellement à B) est definie par

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$ en supposant $P(B) \neq 0$

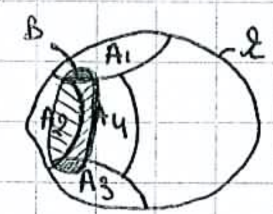
Rq : écriture equivalente : $\boxed{P(A \cap B) = P(A|B) P(B)}$

2. Théorème des probabilités totales

$(A_i)_{i\in I}$ système complet d'événements (ie $\Omega = \bigcup_{i\in I} A_i$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ $i \neq j$)

$$P(B) = \sum_{i\in I} P(B|A_i)P(A_i)$$

Démo :



$$B = B \cap \Omega = B \cap \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} (B \cap A_i)$$

or les A_i sont disjoints donc les $B \cap A_i$ aussi

donc $P\left(\bigcup_{i\in I} (B\cap A_i)\right) = \sum_{i\in I} \underbrace{P(B\cap A_i)}_{P(B|A_i)P(A_i)}$ CQFD.

3. Formule de BAYES.

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

Démo : $\left.\begin{array}{l} P(A|B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)} \\ P(B|A) = \dfrac{P(B\cap A) = P(A\cap B)}{P(A)} \end{array}\right\} \Rightarrow P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$ CQFD.

FIN COURS 1

4. Indépendance

Déf : Deux événements A et B sont indépendants ssi :
$P(A\cap B) = P(A)P(B)$

Rq : . cette noto n'a de véritable sens que si $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$.
. Dans ces conditions en utilisant la déf des probas conditionnelles on a : $P(A|B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$

A et B indépendants $\Leftrightarrow$ $P(A|B)P(B) = P(A)P(B)$
A et B indépendants $\Leftrightarrow$ $P(A|B) = P(A)$

Généralisation : on dit que $(A_i)_{i\in I}$ est une famille d'évènements mutuellement indépendants ssi :

$$P\left(\bigcap_{i\in J} A_i\right) = \prod_{i\in J} P(A_i) \quad \forall J \subset I.$$

exercice d'application.

ex5 (TD1)

→ 1 ou 3 : on tire 1 boule de A
on la regarde
on la met dans B
on tire ensuite 1 boule dans B

→ 2, 4, 5, 6 : on tire 2 boules ds A (s remise)

1) Probabilité d'avoir 1 boule blanche au premier tirage.

$P_1 = \frac{5}{8}$

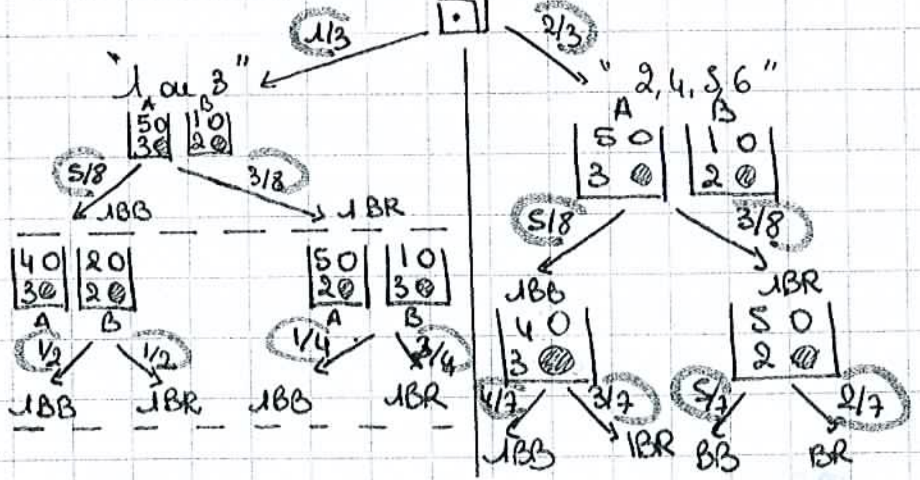
Rq $P_1 = P$("1 ou 3 et la 1ère boule est blanche" ou "2,4,5,6 et la 1ère boule est blanche")

$= P(\text{"1 ou 3 et 1ère BB"}) + P(\text{2,4,5,6 et 1ère BB})$

$= \underbrace{P(\text{1ère BB} \mid \text{1 ou 3})\, P(\text{1 ou 3}) + P(\text{1ère BB} \mid \text{2,4,5,6})\, P(\text{2,4,5,6})}_{\text{Thm des probas totales}}$

$$\frac{5}{8} \times \frac{1}{3} + \frac{5}{8} \times \frac{2}{3} = \frac{5}{8}$$

2) X est le nb de BB tirées au cours de cette expérience. Déterminer les valeurs possibles de X et les probas. associées.



X prend ses valeurs ds $\{0, 1, 2\}$

$$P[X=0] = \left(\frac{1}{3} \times \frac{3}{8} \times \frac{3}{4}\right) + \left(\frac{2}{3} \times \frac{3}{8} \times \frac{2}{7}\right)$$

1 ou 3 — boule rouge | 1 ou 3 — boule rouge | boule rouge et 1 ou 3

$P[X=2] = \left(\frac{1}{3} \times \frac{5}{8} \times \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{2}{3} \times \frac{5}{8} \times \frac{4}{7}\right)$

$P[X=1] = 1 - P[X=0] - P[X=2]$

Rq : on a défini la loi de la variable aléatoire X (cf chap 2)

3) à voir.

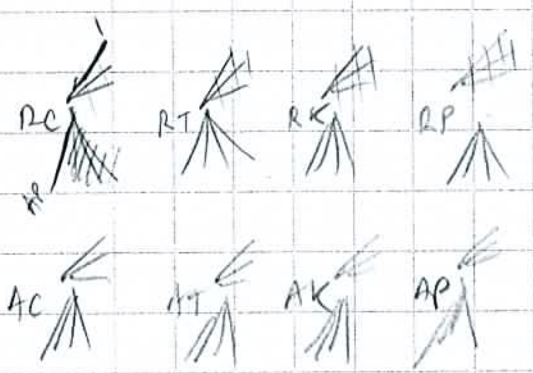
4) Sachant que la 1ère boule est blanche, proba pour que le 4 soit sorti ?

ie : $P(4 \mid 1^{ère}\ BB)$

$P(A|B) = \underline{P(B|A)\, P(A)}$ BAYES

$P(4 \mid 1^{ère}\ BB) = \frac{P(1^{ère}\ BB \mid 4)\, P(4)}{P(1^{ère}\ BB)} = \frac{5/8 \cdot 1/6}{5/8} = 1/6$

Rq : $P(4 \mid 1^{ère}\ BB) = P(4)$: évenements indépendants.



$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} =$