PROBABILITES.

Chap 2 : Variables aléatoires réelles

I Définition

Le triplet de proba $(\Omega, \mathcal{C}, \mathcal{P})$ est parfois "peu utile".

exemple : on jette 2 dés et on s'intéresse à la somme des 2 résultats de ces dés.

$\Omega = \{(1,1), (1,2), \dots, (6,6)\}$

$\mathcal{C} = \mathcal{P}(\Omega)$

On a vite envie de travailler avec l application X définie par :

$$X : \begin{array}{l} \Omega \longrightarrow \mathbb{N} \\ \omega=(m,n) \longmapsto m+n \end{array}$$

les évènements de $\mathcal{C}$

Il y a 1 lien évident entre $\overline{\Omega}$ et les valeurs que prend X. Par exemple, $X=3$ (la somme vaut 3) correspond à $A = \{(1,2), (2,1)\} \in \mathcal{C}$.

Def : Soit $(\Omega, \mathcal{C}, \mathcal{P})$ un triplet de probabilité qui modélise l'expérience. Soit $(\Omega', \mathcal{C}')$ un espace probabilisable qui "résume" les "quantités" qui nous intéressent avec $\Omega' \subset \mathbb{R}$ et $\mathcal{C}'$ construit comme l'ensemble des réunions et intersections des intervalles de Ω'.

On dit que $\mathcal{C}'$est la tribu des Boréliens de $\mathbb{R}$.

ssi

X est une variable aléatoire (va) si c'est une application de Ω dans Ω' qui possède la propriété de mesurabilité (cf cours intégration) :

$$\forall \underbrace{(a,b)}_{[a,b] \text{ ou }]a,b[\text{ ou} \dots} \in \mathcal{C}', \ \{\omega / X(\omega) \in (a,b)\} \in \mathcal{C}$$

Rq : cette propriété sera admise ds toutes les applications.

II Loi d'une variable aléatoire.

On distingue 3 classes de variables aléatoires qui sont rencontrées dans la quasi totalité des applications

① les va discrètes

X est une va discrète si l'ensemble des valeurs possibles de X (ie $\{X(\omega), \omega \in$

est fini ou dénombrable.

On notera alors $\{x_i, i \in I\}$ cet ensemble de valeurs possibles.

La loi de X est définie par : ① $\{x_i, i \in I\}$ ② $P[X=x_i]$ $i \in I$
ensemble des probas associées.
telles que $\sum_{i \in I} P[X=x_i] = 1$

Rq : $P[X \in \Delta] = \sum_{x_i \in \Delta} P[X=x_i]$

- Exemple : X est le résultat d'un jet de dé.

② Les va continues

X est une va continue si l'ensemble des valeurs possibles de X est infini non dénombrable et $P[X = x_i] = 0 \ \forall x_i$

ex : Taille, poids ....

La loi de X est définie par ① $\{X(\omega) \mid \omega \in \Omega\}$ qui est en g^al une réunion d'intervalles

② une densité de probabilité $p(x)$, $x \in \mathbb{R}$ tq

$$\begin{cases} \forall x \ p(x) \geq 0 \\ P[X \in \Delta] = \int_\Delta p(x)\,dx \quad \Delta \subset \mathbb{R} \end{cases}$$

Rq : ⊛ $P[X \in \mathbb{R}] = 1 = \int_{\mathbb{R}} p(x)\,dx$ ms on peut avoir $p(x) > 1$ pr certains x

⊛ $P[X \in [x, x+dx[\,] = \int_x^{x+dx} p(u)\,du \underset{dx \text{ "petit"}}{\approx} p(x) \int_x^{x+dx} du = p(x)\,dx$

$p(x)dx$ s'interprète comme la proba d'appartenir à 1 petit intervalle.

d'où $p(x) = \dfrac{P[X \in [x, x+dx[\,]}{dx}$

FIN cours 2

Donner un exemple = loi uniforme

③ Les va mixtes

On dit que X est une va mixte si l'ens. des valeurs possibles de X est la réunion de 2 ensembles, le premier est un ensemble fini ou dénombrable $\{x_i, i \in I\}$ avec $P[X = x_i] > 0 \ \forall i \in I$, le second est un ens. infini non dénombrable E avec $P[X = x_i] = 0 \ \forall x_i$

$\{X(\omega) \mid \omega \in \Omega\} = E \cup \{x_i, i \in I\}$

ex : tension aux bornes d'1 voltmètre

$\{x_i, i \in I\} = \{V_s, -V_s\}$ Vs tension de saturation.

$E =]-V_s, +V_s[$

La loi de X est définie par ① $\{x_i, i \in I\}$ et $P[X = x_i] \ \forall i \in I$

② E et la densité de proba associée.

avec $P[X \in \Delta] = \int_\Delta p(x)\,dx + \sum_{x_i \in \Delta} P[X = x_i]$

III. Fonction de répartition

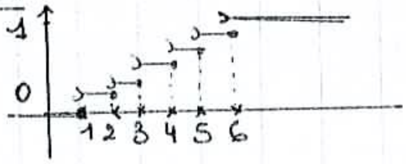
La fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle X est définie par $F(x) = P[X<x]$.

Propriétés : F est une fonction croissante tq $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$

$\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$

- X va discrète à valeurs dans $\{x_i, i \in I\}$.

ex du jet de dés :



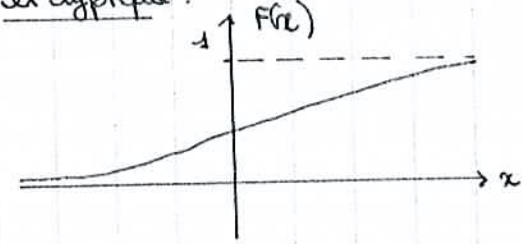
F(x) est une fonction en escalier dont les "sauts" se font aux observations x_i et sont d'amplitude p_i.

- X va continue de densité $p(x)$

$P[X<x] = P[X \in]-\infty, x[] = \int_{-\infty}^{x} p(u)du$

C'est une fonction continue (croissante telle que $\lim_{-\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{+\infty} F(x) = 1$)

ex typique :



- X va mixte : F(x) est une fonction continue par morceaux, qui peut posséder des sauts aux points x_i tels que $P[X=x_i] > 0$.

PROPRIETE FONDAMENTALE

La fonction de répartition caractérise une va.

Application : souvent, pour déterminer la loi de X, on déterminera $F(x)$.

Rq : cas continu $p(x) = F'(x)$

IV Exemples Fondamentaux.

voir poly.

ANNEXE 2 : Tables de lois

LOIS DE PROBABILITÉ DISCRÈTES

m : moyenne σ^2 : variance **F. C.** : fonction caractéristique

$P_k = P[X = k]$ $P_{1\ldots m} = P[X_1 = k_1, \ldots, X_m = k_m]$

LOI	Probabilités	m	σ^2	F. C.
Uniforme	$P_k = \frac{1}{n}$ $k \in \{1, \ldots, n\}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$	$\frac{e^{it}(1-e^{itn})}{n(1-e^{it})}$
Bernoulli	$P[X=1] = p$ $P[X=0] = q$ $p \in [0,1] \quad q = 1-p$	p	pq	pe^{it}
Binomiale $B(n,p)$	$P_k = C_n^k p^k q^{n-k}$ $p \in [0,1] \quad q = 1-p$ $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$	np	npq	$(pe^{it} + q)^n$
Binomiale négative	$P_k = C_{n+k-1}^{n-1} p^n q^k$ $p \in [0,1] \quad q = 1-p$ $k \in \mathbb{N}$	$n\frac{q}{p}$	$n\frac{q}{p^2}$	$\left(\frac{p}{1-qe^{it}}\right)^n$
Multinomiale	$P_{1\ldots m} = \frac{n!}{k_1! \ldots k_m!} p_1^{k_1} \ldots p_m^{k_m}$ $p_j \in [0,1] \quad q_j = 1 - p_j$ $k_j \in \{0, 1, \ldots, n\}$ $\sum_{j=1}^{m} k_j = n \quad \sum_{j=1}^{m} p_j = 1$	np_j	Variance : np_jq_j Covariance : $-np_jp_k$	$\left(\sum_{j=1}^{m} p_j e^{it}\right)^n$
Poisson $P(\lambda)$	$P_k = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$ $\lambda > 0 \quad k \in \mathbb{N}$	λ	λ	$e^{\lambda(e^{it}-1)}$
Géométrique	$P_k = pq^{k-1}$ $p \in [0,1] \quad q = 1-p$ $k \in \mathbb{N}^*$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$	$\frac{pe^{it}}{1-qe^{it}}$

LOIS DE PROBABILITÉ CONTINUES

m : moyenne σ^2 : variance
F. C. : fonction caractéristique

LOI	Densité de probabilité	m	σ^2	F. C.
Uniforme	$f(x)=\frac{1}{b-a}$ $x\in\left]a,b\right[$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{e^{itb}-e^{ita}}{it(b-a)}$
Gamma $\Gamma(\theta,\nu)$	$f(x)=\frac{\theta^\nu}{\Gamma(\nu)}e^{-\theta x}x^{\nu-1}$ $\theta>0,\ \nu>0$ $x\geq 0$	$\frac{\nu}{\theta}$	$\frac{\nu}{\theta^2}$	$\frac{1}{\left(1-i\frac{t}{\theta}\right)^\nu}$
Première loi de Laplace	$f(x)=\frac{1}{2}e^{-\lvert x\rvert}$	0	2	$\frac{1}{1+t^2}$
Normale $N(m,\sigma^2)$	$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$	m	σ^2	$e^{imt-\frac{\sigma^2t^2}{2}}$
Khi$_2$ χ^2_ν $\Gamma\left(\frac{1}{2},\frac{\nu}{2}\right)$	$f(x)=ke^{-\frac{x}{2}}x^{\frac{\nu}{2}-1}$ $k=\frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}$ $\nu\in\mathbb{N}^*,\ x\geq 0$	ν	2ν	$\frac{1}{(1-2it)^{\frac{\nu}{2}}}$
Cauchy $c_{\lambda,\alpha}$	$f(x)=\frac{1}{\pi\lambda\left(1+\left(\frac{x-\alpha}{\lambda}\right)^2\right)}$ $\lambda>0,\ \alpha\in\mathbb{R}$	(-)	(-)	$e^{i\alpha t-\lambda\lvert t\rvert}$
Bêta	$f(x)=kx^{a-1}(1-x)^{b-1}$ $k=\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}$ $a>0,\ b>0,\ x\in\left]0,1\right[$	$\frac{a}{a+b}$	$\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$	(*)

(-) : n'existe pas
(*) : trop compliquée pour être utilisée !

I Espérance mathématique.

① Définition

X étant une va réelle, on définit l'espérance mathématique de $\alpha(X)$ (α étant une fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$) par :

$$E[\alpha(X)] = \begin{cases} X \text{ va discrète : } \sum_{i \in I} \alpha(x_i) P[X = x_i] \\ X \text{ va continue : } \int_{\mathbb{R}} \alpha(u) p(u) du \\ X \text{ va mixte : } \sum_i + \int_{\mathbb{R}} \dots \end{cases}$$

② Propriétés.

. $E[\text{cste}] = \text{cette cste}$

Plus généralement $E[\text{fonction déterministe}] =$ cette fonction déterministe
(non aléatoire)

ex : $E[\cos(t)] = \cos(t)$

$$E[\cos(t + \underset{\substack{\downarrow \\ \Phi \text{ uniforme sur } [0,2\pi[.}}{\Phi})] = \int \cos(t+\varphi)\, \underbrace{p(\varphi)}_{\text{densité de } \Phi} d\varphi.$$

. linéarité :

$E[aX+b] = a E[X] + b$. (vient de la linéarité de Σ et $\int$)

③ Exemples fondamentaux

. les moments non centrés . $m_n = E[X^n]$ $n \in \mathbb{N}$

$n = 0$ $m_0 = 1$

$n = 1$ $m_1 = E[X]$ s'appelle la moyenne de X

on verra à la fin du cours que si $x_1 \dots x_n$ sont des réalisations de X
observations

que $\underbrace{\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i}_{\text{moyenne arithmétiq}} \xrightarrow[n\infty]{} E[X]$.

. les moments centrés : $\mu_n = E[(X - E(X))^n]$

$n = 0$ $\mu_0 = 1$

$n = 1$ $\mu_1 = E[X - E(X)] = E[X] - E[\underbrace{E(X)}_{\text{cste}}] = E[X] - E[X] = 0$.

$n = 2$ $\mu_2 = E[X - E(X)]^2]$ variance de X on verra plus tard que $\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[x_i-\bar{x}]^2}_{\text{moyenne arithmétiq des écarts quadratiques}} \xrightarrow[n\infty]{} \mu_2$

μ_2 mesure la dispersion autour de la valeur moyenne.

$\sqrt{\mu_2}$ s'appelle l'écart type de X .

propriétés de la variance :

- on note souvent $\mathrm{Var}\,X = E[(X-E(X))^2]$
- $\mathrm{Var}\,X = E[X^2 - 2X E(X) + (E(X))^2] = E[X^2] - 2E[X]E(X) + E(X)^2$

  $\mathrm{Var}\,X = E[X^2] - E(X)^2$ utile pour le calcul.
- $\mathrm{Var}(aX+b) = \mathrm{Var}(aX) = a^2\,\mathrm{Var}(X)$

- la fonction caractéristique : $\underset{\in\mathbb{C}}{\varphi_X(t)} = E[e^{itX}]$

  caractérise la loi.

Rq : - dans le cas continu on a $\varphi_X(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} p(x)dx$.

  s'appelle la transformée de Fourier de $p(x)$. On a de bonnes tables qui donnent $p(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbb{R}} \varphi_X(t)e^{-itx}dt$

- $\varphi_X(0) = 1$, $|\varphi_X(t)| \leq 1$

FIN COURS 3

④ Exemples de calculs.

ex 1 : $X \sim P(\lambda)$ (suit la loi de Poisson de paramètre λ)

$$P[X=k] = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \quad k \in \mathbb{N}$$

$$E(X) = \sum_{k\in\mathbb{N}} k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda}\underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}}_{e^{\lambda}} = \lambda .$$

la moyenne de X est λ.

$$\mathrm{Var}\,X = E(X^2) - \underbrace{E(X)^2}_{\lambda^2}$$

$$E(X^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \underset{\substack{\downarrow\\ k(k-1)+k}}{k^2}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \underbrace{\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{(k-2)!}e^{-\lambda}}_{\lambda^2 e^{-\lambda}\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} = \lambda^2} + \underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{(k-1)!}e^{-\lambda}}_{\lambda}$$

$$= \lambda^2 - \lambda^2 + \lambda = \lambda .$$

$$\Phi_X(t) = E[e^{itX}] = \sum_{k\in\mathbb{N}} e^{itk}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{(\lambda e^{it})^k}{k!}$$

$= \exp[-\lambda + \lambda e^{it}] = \exp[\lambda(e^{it}-1)]$. voir utilité + tard

ex 2 : $X \sim N(m,\sigma^2)$ ie $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp - \frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}$ $x \in \mathbb{R}$

$$E[X] = \int_{\mathbb{R}} x f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{x}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right) dx$$

$$\underset{\substack{u=\frac{x-m}{\sigma}\\ x=\sigma u+m\\ dx=\sigma du}}{=} \int_{\mathbb{R}} \frac{\sigma u+m}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} u e^{-\frac{u^2}{2}} du}_{\substack{=0\\ (\text{impaire})}} + m \underbrace{\int \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du}_{\substack{f(x) \text{ avec}\\ \sigma=1 \text{ et } m=0}}$$

$\boxed{\text{Loi normale centrée réduite}}$

$E[X] = m$

$\mathrm{Var}\,X = E[X^2] - E[X]^2$

$$E[X^2] = \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp - \frac{(x-m)^2}{2\sigma^2} dx$$

$$\underset{u=\frac{x-m}{\sigma}}{=} \int_{\mathbb{R}} (\sigma u+m)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

$$= \sigma^2 \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \frac{u^2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du}_{\text{par parties} \Rightarrow 1} + 2m\sigma \int_{\mathbb{R}} \frac{u}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du + m^2 \underbrace{\int \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du}_{1}$$

$= \sigma^2 + m^2$

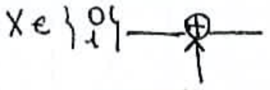
$\mathrm{Var}\,X = \sigma^2$

Rq : $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1$ loi normale centrée réduite

$$\phi_X(t) = E[e^{itX}] = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right] dx$$

$$\phi_X(t) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{après qq}\\ \text{calculs}\\ \text{fastidieux}}}{=} \exp\left[imt - \frac{\sigma^2}{2} t^2\right]$$

VI Changements de variable



$Y = X + \underline{N}$
Bruit typiquement supposé $X \sim N(m, \sigma^2)$

Problème : étant donnée une variable aléatoire réelle X, on cherche à déterminer la loi de $Y = g(X)$ où g est une fonction de $\mathbb{R}$ ds $\mathbb{R}$.

$\boxed{1^{er} \text{ cas}}$ X est une va à valeurs dans $\{x_i, i \in I\}$ I fini ou denombrable alors $Y = g(X)$ est aussi une va discrète à valeurs ds

$\{y_j, j \in J\} = \{g(x_i), i \in I\}$. On a alors :

$$P[Y = y_j] = \sum_{I / g(x_i) = y_j} P[X = x_i]$$

Exemple. $X \sim P(\lambda)$ ie $P[X=i] = \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}$ $i \in \mathbb{N}$

Quelle est la loi de $Y = (X-2)^2$?

Y est à valeurs dans $\{j^2, j \in \mathbb{N}\}$

$P[Y = j^2] = P[(X-2)^2 = j^2] = P[X-2 = j \text{ ou } X-2 = -j] = P[X = 2+j \text{ ou } X = 2-j]$

- si $2+j = 2-j$ ie $j = 0$. $P[Y=0] = P[X=2] = \frac{\lambda^2}{2} e^{-\lambda}$
- si $j \geq 1$ on a $2+j \neq 2-j$ donc $P[Y=j^2] = P[X=2+j] + P[X=2-j]$

$P[X=2+j] = \frac{\lambda^{2+j}}{(2+j)!} e^{-\lambda}$ car $2+j \in \mathbb{N}$ $\forall j \in \mathbb{N}$

$$P[X = 2-j] = \begin{cases} j=1 & P[X=1] = \lambda e^{-\lambda} \\ j=2 & P[X=0] = e^{-\lambda} \\ j \geq 3 & P[X=2-j] = 0 \end{cases}$$

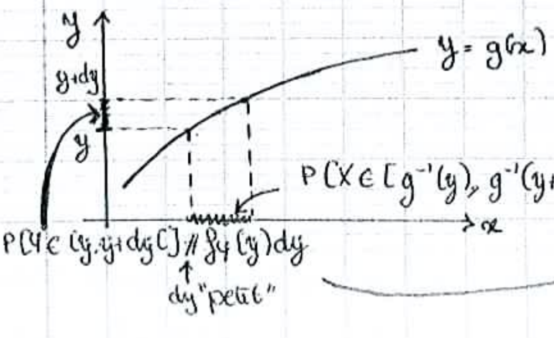
$$\boxed{\begin{aligned} P[Y=0] &= \frac{\lambda^2}{2} e^{-\lambda} \\ P[Y=1] &= \frac{\lambda^3}{6} e^{-\lambda} + \lambda e^{-\lambda} \\ P[Y=4] &= \frac{\lambda^4}{24} e^{-\lambda} + e^{-\lambda} \\ P[Y=j^2] &= \frac{\lambda^{2+j}}{(2+j)!} e^{-\lambda} \quad j \geq 3. \end{aligned}}$$

2ème cas: X est une va continue à valeurs dans un ouvert $O_X \subset \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ application bijective de O_X dans $O_Y \subset \mathbb{R}$ différentiable ainsi que son inverse g^{-1}

alors $Y = g(X)$ est une va continue de densité :

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \underbrace{\left| \frac{dx}{dy} \right|}_{\text{Jacobien de la transformation.}}$$

Idée de preuve :



$P(X \in [g^{-1}(y), g^{-1}(y+dy)[\# f_X(g^{-1}(y))\,dx$ $\sim$ $f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \frac{dx}{dy}$

$P[Y \in [y, y+dy[] \# f_Y(y)\,dy$

Exemple : $X \sim N(m, \sigma^2)$

$Y = aX+b$ $a \neq 0$ loi de Y ?

$y = g(x)$ est une transformation bijective $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

densité de X : $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp - \frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}$ $x \in \mathbb{R}$

densité de Y : $f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\frac{y-b}{a} - m\right)^2\right)\left|\frac{dx}{dy}\right|$

$$f_Y(y) = \frac{1}{|a|}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\frac{y-(b+am)}{a}\right)^2\right]$$

on pose $M = b+am$

$\Sigma^2 = a^2\sigma^2$

Y suit une loi normale $Y \sim N(b+am, a^2\sigma^2)$

Rq : $E[Y] = E[aX+b] = aE[X]+b = am+b$

$Var[Y] = Var[aX+b] = Var[aX] = a^2 Var[X] = a^2\sigma^2$

3ème cas : $Y = g(X)$ est bijectif par morceaux et les hypothèses précédentes (différentiabilité ...) sont vérifiées sur chaque morceau. Alors la densité de Y est la somme des contributions de chaque morceau.

Exemple : $X \sim N(0,1)$ $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

$Y = X^2$ loi de Y ?

bijection 1 : $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$
$x \to y = x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{y}$ $g_1(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y/2}\left|\frac{1}{2\sqrt{y}}\right|$ $y \in \mathbb{R}^+$

bijection 2 : $\mathbb{R}^- \to \mathbb{R}^+$
$x \to y = x^2 \Leftrightarrow x = -\sqrt{y}$ $g_2(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y/2}\left|-\frac{1}{2\sqrt{y}}\right|$ $y \in \mathbb{R}^+$

la densité de Y est $f_Y(y) \begin{cases} = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-y/2} & y > 0 \\ 0 & y < 0 \end{cases}$

note : $f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-y/2} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(y)$

Remarque : on dit que Y suit une loi du χ^2 à 1 degré de liberté et on note $Y \sim \chi^2_1$

FIN COURS 4