

# Couples de Variables Aléatoires Réelles

## 1. Définition

Soit  $(\Omega, C, P)$  un espace probabilisé et  $(\Omega', C')$  un espace probabilisable avec  $\Omega' \subset \mathbb{R}^2$  et  $C'$  construit à partir des réunions et intersections finies ou dénombrables des pavés  $(a, b) \times (c, d)$  de  $\mathbb{R}^2$ . Un couple  $(X, Y)$  de variables aléatoires réelles est une application mesurable de  $\Omega$  dans  $\Omega'$ .

On notera  $P[(X, Y) \in \Delta], \Delta \subset \mathbb{R}^2$ , la probabilité que le couple  $(X, Y)$  prenne ses valeurs dans  $\Delta$ .

Dans la plupart des applications, on rencontre les couples de variables aléatoires suivants :

### 1-1 Les couples de va discrètes

La loi du couple  $(X, Y)$  est définie par l'ensemble des valeurs possibles du couple (qui est un ensemble fini ou dénombrable) noté  $\{(x_i, y_j), i \in I, j \in J\}$  et par les probabilités associées  $p_{ij} = P[X = x_i, Y = y_j], i \in I, j \in J$  telles que  $p_{ij} \geq 0$  et  $\sum_{i,j} p_{ij} = 1$ .

### 1-2 Les couples de va continues

La loi du couple  $(X, Y)$  est définie par l'ensemble des valeurs possibles du couple (qui est un ensemble infini non dénombrable), en général une réunion d'intervalles de  $\mathbb{R}^2$ , et par une densité de probabilité  $f(x, y)$  telle que

$$f(x, y) \geq 0$$
$$\int \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy = 1$$

et de manière plus générale

$$P[(X, Y) \in \Delta] = \int \int_{\Delta} f(x, y) dx dy$$

**Remarque** : signification de  $f(x, y)$

## 2. Fonction de Répartition

### Définition

$$F(x, y) = P[X < x, Y < y]$$

### Remarques :

- C'est une fonction étagée lorsque  $(X, Y)$  est un couple de va discrètes
- C'est une fonction continue lorsque  $(X, Y)$  est un couple de va continues avec

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) du dv$$

d'où

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}$$

### 3. Lois Marginales

Les lois marginales d'un couple  $(X, Y)$  sont les lois de  $X$  et de  $Y$  telles que

- **Cas discret**

$$P[X = x_i] = p_{i.} = \sum_{j \in J} p_{ij}$$

$$P[Y = y_j] = p_{.j} = \sum_{i \in I} p_{ij}$$

- **Cas continu**

densité de  $X$  :  $f(x, \cdot) = \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy$

densité de  $Y$  :  $f(\cdot, y) = \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dx$

ex p128

### 4. Lois Conditionnelles

Les lois conditionnelles d'un couple  $(X, Y)$  sont les lois de  $X|Y = y$  et de  $Y|X = x$  telles que

- **Cas discret**

$$P[X = x_i | Y = y_j] = \frac{p_{ij}}{p_{.j}}$$

$$P[Y = y_j | X = x_i] = \frac{p_{ij}}{p_{i.}}$$

- **Cas continu**

densité de  $X|Y = y$  :  $f(x|y) = \frac{f(x, y)}{f(\cdot, y)}$

densité de  $Y|X = x$  :  $f(y|x) = \frac{f(x, y)}{f(x, \cdot)}$

## 5. Indépendance

On dit que  $X$  et  $Y$  sont des variables aléatoires indépendantes si

$$P[X \in \Delta, Y \in \Delta'] = P[X \in \Delta] P[Y \in \Delta'], \forall \Delta, \forall \Delta'$$

De manière équivalente,  $X$  et  $Y$  sont des variables aléatoires indépendantes si

- **Cas discret**

$$p_{ij} = p_i \cdot p_j \quad \forall i \in I, \forall j \in J$$

ou

$$P[X = x_i | Y = y_j] = p_i \quad \forall i \in I, \forall j \in J$$

- **Cas continu**

$$f(x, y) = f(x, \cdot) f(\cdot, y) \quad \forall x, \forall y$$

ou

$$f(x|y) = f(x, \cdot), \quad \forall x, \forall y$$

**Propriété :** si  $X$  et  $Y$  sont des variables aléatoires et  $\alpha$  et  $\beta$  sont des applications continues de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , alors  $\alpha(X)$  et  $\beta(Y)$  sont des variables aléatoires indépendantes. La réciproque est vraie si  $\alpha$  et  $\beta$  sont des applications bijectives. Par contre, dans le cas où  $\alpha$  et  $\beta$  ne sont pas bijectives, la réciproque est fautive. On vérifiera par exemple que le couple  $(X, Y)$  de densité

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4} (1 + xy) & \text{si } |x| < 1 \text{ et } |y| < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est tel que  $X^2$  et  $Y^2$  sont indépendantes alors que  $X$  et  $Y$  ne le sont pas.



PROBABILITES

Chap 3

Couples de variables aléatoires réelles

I. Définition

$(\mathcal{E}, \mathcal{E}, P)$  un triplet de probabilités et  $(\mathcal{E}', \mathcal{E}')$  un espace probabilisable avec  $\mathcal{E}' \subset \mathbb{R}^2$  et  $\mathcal{E}'$  est construit par réunion et intersection finies ou dénombrables des pavés  $(a, b) \times (c, d)$  de  $\mathbb{R}^2$ . Un couple  $(X, Y)$  de va réelles est une application de  $\mathcal{E}$  dans  $\mathcal{E}'$  qui possède la propriété de mesurabilité.

On notera  $P[(X, Y) \in \Delta]$ ,  $\Delta \in \mathcal{E}'$ , la probabilité que le couple  $(X, Y)$  prenne ses valeurs dans  $\Delta$ .

Les principaux couples de va sont les suivants:

1. Les couples de va discrètes

définis par  $\{(x_i, y_j) \mid i \in I, j \in J\}$  des valeurs possibles de  $(X, Y)$  et par  $p_{ij} = P[X = x_i, Y = y_j]$  avec  $p_{ij} > 0$  et  $\sum_{\substack{i \in I \\ j \in J}} p_{ij} = 1$

2. Les couples de va continues

définis par l'ensemble des valeurs prises par le couple (en général une  $U$  ou  $n$  de pavés) et par une densité de probabilité  $p(x, y)$  telle que  $p(x, y) \geq 0$ ,  $P[(X, Y) \in \Delta] = \iint_{\Delta} p(x, y) dx dy$

d'où :  $P[(X, Y) \in \mathbb{R}^2] = \iint_{\mathbb{R}^2} p(x, y) dx dy = 1$

$P[X \in [x, x+dx], Y \in [y, y+dy]] \stackrel{\substack{\# \\ dx \text{ petit} \\ dy \text{ petit}}}{=} \int p(x, y) dx dy$

II Fonction de répartition

La fonction de répartition d'un couple  $(X, Y)$  est définie par

$$F_{X,Y}(u, v) = P[X \leq u, Y \leq v]$$

C'est une fonction <sup>«à»</sup> étagée (constante sur des pavés) dans le cas discret

continue dans le cas continu avec  $F_{X,Y}(u, v) = \iint_{-\infty}^u \iint_{-\infty}^v p_{X,Y}(x, y) dx dy$

d'où  $p_{X,Y}(u, v) = \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial}{\partial v} [F_{X,Y}(u, v)] = \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}(u, v)$



### III. Lois marginales et lois conditionnelles.

des lois marginales du couple  $(X, Y)$  sont les lois de  $X$  et de  $Y$  définies par:

CAS DISCRET  $P[X = x_i] = P[\cup \{X = x_i, Y = y_j\}] = \sum_j P[X = x_i, Y = y_j]$

Notation:  $p_{i.} = \sum_j p_{ij}$

de même  $p_{.j} = \sum_i p_{ij}$

CAS CONTINU  $f(x, \cdot) = \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy$  et  $f(\cdot, y) = \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dx$ .  
densité de  $X$  densité de couple  $(X, Y)$

(Preuve à voir)

des lois conditionnelles sont définies par:

CAS DISCRET  $P[X = x_i | Y = y_j] = \frac{p_{ij}}{p_{.j}} \quad (= \frac{P(A \cap B)}{P(B)})$

$P[Y = y_j | X = x_i] = \frac{p_{ij}}{p_{i.}}$

CAS CONTINU des lois de  $Y|X=x$  et  $X|Y=y$  sont des lois continues de densités:

$f(y|x) = \frac{f(x, y)}{f(x, \cdot)}$  et  $f(x|y) = \frac{f(x, y)}{f(\cdot, y)}$

$\Delta \int f(y|x) dy \neq P(Y \in (y, y+dy) | X=x) = \frac{P(Y \in (y, y+dy), X=x)}{P(X=x)}$

indétermination.

donc pour résoudre ce pb on utilise  $f(y|x) dy = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{P(Y \in (y, y+dy), X \in (x, x+dx))}{P(X \in (x, x+dx))}$   
etc...

### IV. Indépendance

On dit que  $X$  et  $Y$  sont deux v.a indépendantes si  $P[X \in A, Y \in B] = P[X \in A]P[Y \in B]$   
 $\forall A \in \mathbb{R} \quad \forall B \in \mathbb{R}$

(à rapprocher de  $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ )

Cette définition se peut se simplifier de la façon suivante:

Probabilités et Statistiques  
Complément de Cours : Densités Conditionnelles

Cette note présente la technique permettant d'obtenir la densité de  $Y|X = x$  dans le cas de variables aléatoires continues (moyennant certaines hypothèses comme interversion des limites et des intégrales ...).

On pose

$$P[Y \in \Delta | X = x] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P[Y \in \Delta, X \in [x, x+h]]}{P[X \in [x, x+h]]}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} P[Y \in \Delta | X = x] &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\iint_{\Delta \times [x, x+h]} f(x, y) dx dy}{\iint_{\mathbb{R} \times [x, x+h]} f(x, y) dx dy} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_{\Delta} \left[ \int_{[x, x+h]} f(x, y) dx \right] dy}{\int_{\mathbb{R}} \left[ \int_{[x, x+h]} f(x, y) dx \right] dy} \end{aligned}$$

et on applique le théorème de la moyenne pour  $y$  fixé :

$$\int_{[x, x+h]} f(x, y) dx = h f(x + \theta_y h, y) \quad \theta_y \in [0, 1[$$

On en déduit (en supposant  $f(x, \cdot) \neq 0$ ) :

$$P[Y \in \Delta | X = x] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_{\Delta} [h f(x + \theta_y h, y)] dy}{\int_{\mathbb{R}} [h f(x + \theta_y h, y)] dy} = \frac{\int_{\Delta} f(x, y) dy}{f(x, \cdot)}$$

c'est-à-dire :

$$P[Y \in \Delta | X = x] = \int_{\Delta} \frac{f(x, y)}{f(x, \cdot)} dy$$

Cette petite note explique comment dans un cas simple, on peut montrer que la densité de  $Y|X = x$  pour  $f(x, \cdot) \neq 0$  est

$$f(y|x) = \frac{f(x, y)}{f(x, \cdot)}$$



CAS DISCRET  $X$  et  $Y$  indépendants  $\Leftrightarrow p_{ij} = p_i \cdot p_j \quad \forall i, j$

Rq:  $X$  et  $Y$  ind  $\Leftrightarrow f_{X|Y} = P(X=x_i | Y=y_j) = p_i \quad \forall i, j$   
 en d'autres termes  $f_{ij}$  indépendant de  $j$

CAS CONTINU  $X$  et  $Y$  indépendants  $\Leftrightarrow f(x, y) = f(x, \cdot) f(\cdot, y) \quad \forall x, y$  (voir TD3)

Rq:  $X$  et  $Y$  ind  $\Leftrightarrow f(x|y) = f(x, \cdot) \quad \forall x, y$   
 i.e.  $f(x|y)$  indépendant de  $y$

Propriété: Si  $X$  et  $Y$  sont indépendants et si  $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 alors en général  $\alpha(X)$  et  $\beta(Y)$  sont des va indépendants

## V. Espérance mathématique

### 1. Définition.

De manière analogue au cas 1D, on définit l'espérance mathématique de  $\alpha(X, Y)$ , où  $\alpha$  est une fonction de  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  par:

$$E[\alpha(X, Y)] = \begin{cases} \text{cas discret:} \\ \sum_{i,j} \alpha(x_i, y_j) p_{ij} \\ \text{cas continu} \\ \int_{\mathbb{R}^2} \alpha(x, y) f(x, y) dx dy \\ \text{cas mixte: } X \text{ discrète, } Y \text{ continue} \\ \sum_i \left( \int_{\mathbb{R}} \alpha(x_i, y) f(y) dy \right) P(X=x_i) = \sum_i \int_{\mathbb{R}} \alpha(x_i, y) f_i(y) dy \end{cases}$$

### 2. Propriétés.

- linéarité**  $E[a\alpha(X, Y) + b\beta(X, Y)] = aE[\alpha(X, Y)] + bE[\beta(X, Y)]$
- constante ou fonction déterministe**  $E[cte] = cte$ ,  $E[ctt] = cte$  ( $t = \text{temps}$ )

$$E[\alpha(X)] = \begin{cases} \text{cas continu} \\ \iint_{\mathbb{R}^2} \alpha(x) f(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}} \alpha(x) \left[ \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy \right] dx \\ f(x, \cdot) \end{cases}$$

la définition est cohérente avec le cas 1 variable.

- indépendance**  $E[\alpha(X) \beta(Y)] = E[\alpha(X)] E[\beta(Y)]$  si  $X$  et  $Y$  indépendantes alors

demo (cas continu)

$$E[\alpha(X) \beta(Y)] = \iint_{\mathbb{R}^2} \alpha(x) \beta(y) f(x, y) dx dy = \iint_{\mathbb{R}^2} \alpha(x) \beta(y) f(x, \cdot) f(\cdot, y) dx dy$$

$X$  et  $Y$  ind

$$\stackrel{\text{var séparables}}{=} \int_{\mathbb{R}} \alpha(x) f(x, \cdot) dx \int_{\mathbb{R}} \beta(y) f(\cdot, y) dy = E[\alpha(X)] E[\beta(Y)]$$

### 3. Exemples.

les moments croisés  $\mu_{ij} = E[(X - E(X))^i (Y - E(Y))^j]$



les moments non centrés  $m_{ij} = E[X^i Y^j]$   $\forall i \in \mathbb{N}$   
 $\forall j \in \mathbb{N}$

Rq: pour  $i=0$  ou  $j=0$ , on a comme au cas 1D.

pour  $i=1$  et  $j=1$ , on a  $\mu_{11} = E[(X-E(X))(Y-E(Y))]$

$\mu_{11}$  s'appelle la covariance entre  $X$  et  $Y$  notée  $\text{Cov}(X, Y)$

Calcul de  $\text{Cov}(X, Y)$ :  $\mu_{11} = E[(X-E(X))(Y-E(Y))]$

$$= E[X Y - X E(Y) - Y E(X) + E(X) E(Y)]$$

$$= E[X Y] - E[X] E(Y) - E[Y] E(X) + E(X) E(Y)$$

$$\text{Cov}(X, Y) = E[X Y] - E[X] E(Y)$$

Matrice de covariance (ou matrice des variances-covariances)

$$E \left[ \begin{pmatrix} X-E(X) \\ Y-E(Y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X-E(X) & Y-E(Y) \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} \text{Var} X & \text{Cov}(X, Y) \\ \text{Cov}(X, Y) & \text{Var} Y \end{pmatrix}$$

Rq: si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes, alors  $\text{Cov}(X, Y) = 0$  et donc la matrice de covariance est diagonale. la réciproque est fautive (voir TD)

de coefficient de corrélation

$$r_{X, Y} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

avec  $\sigma_X =$  écart type de  $X = \sqrt{\text{Var} X}$

$$\sigma_Y = \dots \quad Y = \sqrt{\text{Var} Y}$$

On va voir que  $r_{X, Y}$  est une mesure imparfaite mais très pratique du lien existant entre  $X$  et  $Y$ .

propriétés:  $-1 \leq r_{X, Y} \leq 1$

dems: on pose  $g(\alpha) = E[(X-E(X) + \alpha(Y-E(Y)))^2] \geq 0 \quad \forall \alpha$

$$\text{mais } g(\alpha) = \text{Var} X + 2\alpha \text{Cov}(X, Y) + \alpha^2 \text{Var} Y \geq 0 \quad \forall \alpha$$

$$\Rightarrow \Delta' \leq 0$$

$$\Rightarrow \Delta' = \text{Cov}(X, Y)^2 - \text{Var} X \text{Var} Y \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{\text{Cov}(X, Y)^2}{\text{Var} X \text{Var} Y} \leq 1 \Rightarrow \boxed{r_{X, Y}^2 \leq 1}$$

Rq: on montre que  $\langle X, Y \rangle = E[X Y]$  est un produit scalaire.

on applique Cauchy-Schwarz à  $\tilde{X} = X - E(X)$ ,  $\tilde{Y} = Y - E(Y)$

Inégalité de Cauchy-Schwarz:  $|\langle X, Y \rangle|^2 \leq \|X\|^2 \|Y\|^2$

$$Y = \sum_{i=1}^n X_i$$

$$X_i \begin{cases} \rightarrow 1 & p \\ \rightarrow 0 & q \end{cases}$$

$$E[X_i] = p$$

$$E[Y] = np$$

si  $N$  aleatorie

$$E\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = E\left[E\left[\sum_{i=1}^n X_i \mid N\right]\right] = E[np] = pE(n)$$

$$|\text{cov}(X, Y)|^2 \leq \text{var} X \text{ var} Y$$

Que se passe-t-il lorsque  $r_{XY} = \pm 1$ ?

$$\text{alors } \Delta' = 0 \rightarrow g(d) = \text{var} Y (d - d_0)^2$$

$$g(d_0) = 0$$

$$\text{d'où } E[(X - E(X) + d_0(Y - E(Y)))^2] = 0$$

$$X - E(X) + d_0(Y - E(Y)) = 0$$

$r_{XY} = \pm 1 \Rightarrow X$  et  $Y$  sont liés par une relation affine.

la réciproque est vraie (évident)

conclusion.

$$X \text{ et } Y \text{ ind.} \Rightarrow r_{XY} = 0$$

$$X \text{ et } Y \text{ liés par une relation affine} \Leftrightarrow r_{XY} = \pm 1$$

$$-1 \leq r_{XY} \leq +1$$

$r_{XY}$  est une mesure imparfaite du lien entre  $X$  et  $Y$

### Fonction caractéristique

Rappel (1D)  $\phi_X(u) = E[e^{i u X}] \quad u \in \mathbb{R}$

la fonction caractéristique d'un couple est définie par :

$$\phi_{X,Y}(u, v) = E[e^{i(uX + vY)}] \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2$$

ou plus souvent  $u = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$  d'où  $\phi_{X,Y}(u) = E[e^{i u^T \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}}] \quad u \in \mathbb{R}^2$

Fin cours

### 4. Espérances conditionnelles

Thm:  $E[g(X, Y)] = E_x[E_y[g(X, Y) | X]]$

Exemple d'application : le "secteur"

$$X(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \phi)$$

Calculer plutôt  $E[X^2(t)]$

Modèle |  $A = 220 \sqrt{2}$   
|  $f_0 = 50 \text{ Hz}$

• autre exemple plus simple  $Y = \sum_{i=1}^N X_i$   $X_i \rightarrow \pm 1$  p  
 $\rightarrow 0$  q  
NVP(1)

$\phi$  uniforme sur  $[0, 2\pi[$   $f(\phi) = \frac{1}{2\pi} \mathbb{1}_{[0, 2\pi[}(\phi)$

$$E[X(t)] = \int_{\mathbb{R}} A \cos(2\pi f_0 t + \phi) f(\phi) d\phi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A \cos(2\pi f_0 t + \phi) d\phi = 0$$

Modèle |  $A = 220 \sqrt{2}$

$\phi$  uniforme sur  $[0, 2\pi[$

$f_0$  uniforme sur  $[-50 - \frac{\epsilon}{2}, 50 + \frac{\epsilon}{2}]$

( $\phi$  et  $f_0$  ou général indépendants)

$$\begin{aligned} \iint \alpha(x, y) f(x, y) dx dy &= \\ \iint \alpha(x, y) f(y|x) f(x) dx dy &= \\ \int \left[ \int \alpha(x, y) f(y|x) dy \right] f(x) dx &= \\ E_x \left[ E[\alpha(x, y) | X] \right] & \end{aligned}$$



$$E[X(t)] = E\left[\underbrace{E[X(t) | \mathcal{F}_0]}_0\right] = E[\varphi_0] = 0.$$

## VI Changements de variable de $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

Problème : étant donné un couple  $(X, Y)$  de loi connue, comment peut-on déterminer la loi de  $\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \alpha(X, Y)$  où  $\alpha$  est une fonction de  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  et  $U, V$  deux fonctions de  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ .

### 1. Cas discret

Si  $(X, Y)$  est un couple de va discrètes à valeurs dans  $\{(x_i, y_j) \mid i \in I, j \in J\}$  alors  $(U, V)$  est aussi un couple de va discrètes à valeurs dans

$\{\alpha(x_i, y_j), i \in I, j \in J\} = \{(u_k, v_\ell), k \in K, \ell \in L\}$  avec :

$$P\left[\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_k \\ v_\ell \end{pmatrix}\right] = \sum_{\{(i,j) \mid \alpha(x_i, y_j) = (u_k, v_\ell)\}} P[X=x_i, Y=y_j] \quad \text{c'est un cas "simple".}$$

### 2. Cas continu

Théorème : si  $(X, Y)$  est un couple de va continues à valeurs dans un ouvert  $\Delta \subset \mathbb{R}^2$  et si  $\alpha: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  est bijective continûment différentiable ainsi que son inverse  $\alpha^{-1}$ , alors  $\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \alpha\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right)$  est un couple de va continues à valeurs dans  $\alpha(\Delta)$  de densité :

$$f(u, v) = f(x, y) \left| \det(J) \right|$$

avec  $J$  matrice jacobienne  $J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$

Exemple :  $\begin{cases} X \sim N(0, 1) \\ Y \sim N(0, 1) \\ X \text{ et } Y \text{ indépendantes} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Quelle est la loi de  $\begin{pmatrix} R \\ \Phi \end{pmatrix}$  avec  $\begin{cases} X = R \cos \Phi \\ Y = R \sin \Phi \end{cases}$

On sait que la chgt de va est bijectif de  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  dans  $]0, +\infty[ \times ]0, 2\pi[$

$$J = \begin{pmatrix} \cos \Phi & -R \sin \Phi \\ \sin \Phi & R \cos \Phi \end{pmatrix} \Rightarrow \det J = R$$

$$\text{d'où : } f(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{r^2}{2}} r \quad (r, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times ]0, 2\pi[$$

Rq: si  $\alpha$  est bijective par morceaux, on ajoute la contribution de chaque bijection.

### 3. Cas continu non bijectif

## VII Changements de variables de $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$U = \alpha(X, Y) \quad \alpha: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

Méthode 1

on ajoute une variable fictive  $V = \beta(X, Y)$ , de façon à rendre le changement de var bijectif (si possible), on détermine la loi de  $\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = f(u, v)$ , puis celle de  $U$  grâce à  $f(u, \cdot) = \int f(u, v) dv$  en général  $V = X$  ou  $V = Y$ .

$$\text{Ex: } X \sim U(0,1) \quad f(x, \cdot) = \mathbb{1}_{(0,1)}(x)$$

$$Y \sim U(0,1) \quad f(y, \cdot) = \mathbb{1}_{(0,1)}(y)$$

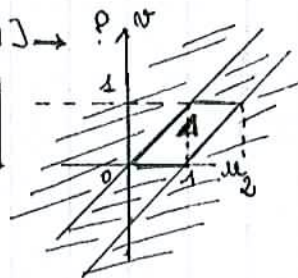
$X$  et  $Y$  indep.

Quelle est la loi de  $U = X + Y$ ?

$$\text{on pose par exemple } V = X \Rightarrow \begin{cases} U = X + Y \\ V = X \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = V \\ Y = U - V \end{cases}$$

donc le chgt de variable est bijectif de  $[0,1] \times [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^2$

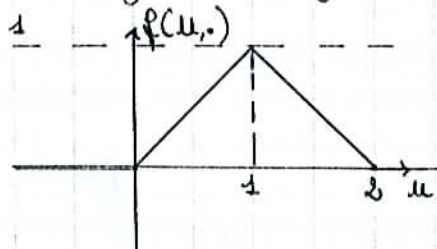
$$\det \text{ de } \Delta: \begin{cases} 0 \leq X \leq 1 \\ 0 \leq Y \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq V \leq 1 \\ 0 \leq U - V \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq V \leq 1 \\ V \leq U \leq V + 1 \end{cases}$$



$$\det J = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

$$f(u, v) = \mathbb{1}_{\Delta}(u, v)$$

$$\text{loi de } U: f(u, \cdot) = \int_{\mathbb{R}} f(u, v) dv = \begin{cases} 0 & \text{si } u \leq 0 \text{ ou } u \geq 2 \\ u & \text{si } u \in [0,1] \\ 2-u & \text{si } u \in (1,2) \end{cases}$$

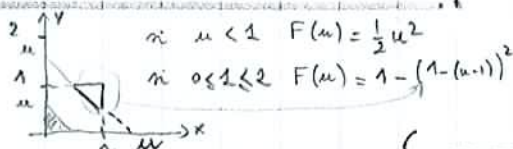


$$\text{Rq: } \int_{\mathbb{R}} f(u, \cdot) du = 1$$

Méthode 2

on calcule directement la fonction de répartition de  $U$   
 $F(u) = P[U < u] = P[\alpha(X, Y) < u] = P[(X, Y) \in D_u]$   
 $= \iint_{D_u} f(x, y) dx dy$

$$\text{ex précédent } F(u) = P[X + Y < u]$$





Méthode 3 pour  $U = X + Y$ ,  $X$  et  $Y$  indépendants  
utilisation des fonctions caractéristiques

$$\text{Ex: } \begin{cases} X \sim N(m_1, \sigma_1^2) \\ Y \sim N(m_2, \sigma_2^2) \\ X \text{ et } Y \text{ indep.} \end{cases} \quad \text{loi de } U = X + Y ?$$

$$\phi_U(t) = E[e^{itU}] = E[e^{itX} e^{itY}] \stackrel{\substack{\uparrow \\ X \text{ et } Y \\ \text{indépendants}}}{=} E[e^{itX}] E[e^{itY}] = \phi_X(t) \phi_Y(t)$$

$$\text{Dans les tables, on a } X \sim N(m_1, \sigma_1^2) \quad \phi_X(t) = \exp\left(i m_1 t - \frac{\sigma_1^2 t^2}{2}\right)$$

$$Y \sim N(m_2, \sigma_2^2) \quad \phi_Y(t) = \exp\left(i m_2 t - \frac{\sigma_2^2 t^2}{2}\right)$$

$$\text{d'où } \phi_U(t) = \exp\left(i \frac{(m_1 + m_2)}{m} t - \frac{1}{2} \frac{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}{\sigma^2} t^2\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{U \sim N(m_1 + m_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)}$$