PROBABILITES

Chap 4

Vecteurs gaussiens

I. Définition

on dit que $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$ suit une loi normale à n dimensions (ou que X est un vecteur gaussien) et on note $X \sim N_n(m, \Sigma)$ si la densité de X s'écrit $f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sqrt{\det \Sigma}} \exp\left(-\frac{1}{2} {}^t(x-m)\Sigma^{-1}(x-m)\right) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

où : $m = \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, et $\Sigma \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive.

- . Σ symétrique ${}^t\Sigma = \Sigma$
- . Σ positive ${}^t x \Sigma x \geq 0 \ \forall x$
- . Σ définie ${}^t x \Sigma x = 0 \Rightarrow x = 0$

Σ est diagonalisable avec des v.p $d_i > 0$
donc Σ "se comporte" comme $\begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix}$
et $\det \Sigma > 0$, Σ inversible.

STOP 6 octobre 2003

n = 1 : on a $m = (m)$ et $\Sigma = (\sigma^2)$, $\sigma^2 > 0$.
d'où $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{(x-m)^2}{\sigma^2}\right\}$

on retrouve la densité d'une loi normale à 1D. Cohérent.

Σ diagonale : $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$ donc $\Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\sigma_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & 1/\sigma_n^2 \end{pmatrix}$

d'où $f(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n \sqrt{\sigma_1^2 \dots \sigma_n^2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - m_i)^2}{\sigma_i^2}\right)$

ie $\boxed{f(x) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} \exp -\frac{1}{2\sigma_i^2}(x_i - m_i)^2}$ produit de n densités normales à 1D.

Cas général. $f(x) = \text{cste} \cdot \exp\left\{\underbrace{\text{forme quadratique}}_{\frac{1}{2}\sum a_{ij} x_i x_j} + \underbrace{\text{terme linéaire}}_{\sum b_i x_i} + \text{cste}\right\}$

Rq : on note souvent $f(x) = \text{cste} \exp\left\{\frac{{}^t x A x}{2} + {}^t B x + K\right\}$

Théorème : Si $X \sim N_n(m, \Sigma)$, alors on a

fonction génératrice des moments : $\theta(u) = E\left[e^{{}^t u X}\right] = \int \cdots \int_{\mathbb{R}^n} e^{{}^t u x} f(x) dx = \exp\left({}^t u m + \frac{1}{2} {}^t u \Sigma u\right)$

fonction caractéristique : $\phi(u) = E\left[e^{i {}^t u X}\right] = \int \cdots \int_{\mathbb{R}^n} e^{i {}^t u x} f(x) dx = \exp\left(i {}^t u m - \frac{1}{2} {}^t u \Sigma u\right)$

Signification de m et de Σ

En utilisant ce théorème, on peut déterminer tous les moments de X (d'où le nom de $\Theta(u)$). En effet :

Moments d'ordre 1 : $E[X_i]$

$$\Theta(u) = E[e^{{}^tuX}] = E\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{({}^tuX)^k}{k!}\right] \underset{\text{admis}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} E[({}^tuX)^k]$$

d'où $\Theta(u) = 1 + E[u_1X_1 + \dots + u_nX_n] + \frac{1}{2} E[(u_1X_1 + \dots + u_nX_n)^2] + \dots$

$$= 1 + u_1E[X_1] + u_2E[X_2] + \dots + u_nE[X_n] + \frac{1}{2}E[(\ )^2] + \dots$$

on "voit" donc que $\boxed{E[X_i] = \left.\frac{\partial \Theta(u)}{\partial u_i}\right|_{u=0}}$

Puisqu'on connait $\Theta(u) = \exp[{}^tum + \frac{1}{2}{}^tu\Sigma u]$ on en déduit :

$$E[X_i] = \left[\exp[{}^tum + \frac{1}{2}{}^tu\Sigma u].m_i\right]\Big|_{u=0} = m_i$$

Conclusion : $m = \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix}$ est le vecteur des moyennes.

On fait de même à l'ordre 2 et on obtient $\boxed{E[X_iX_j] = m_im_j + \Sigma_{ij}}$

d'où $\Sigma_{ij} = E[X_iX_j] - m_im_j = \begin{cases} i=j & \operatorname{Var} X_i \\ i \neq j & \operatorname{Cov}(X_i, X_j) \end{cases}$

d'où $\Sigma = \begin{array}{c|c} & \qquad\qquad j \\ i \rightarrow & \begin{pmatrix} \operatorname{Var}X_1 & & \\ & \operatorname{Var}X_2 & \\ \operatorname{Cov}(X_i,X_j) & \ddots & \operatorname{Var}X_n \end{pmatrix} \end{array}$ s'appelle la matrice de covariance.

Rq : Σ s'écrit de la façon suivante $\Sigma = E[(X - E(X))\,{}^t(X - E(X))]$

2. Transformation affine

Problème : soit X un vecteur Gaussien $X \sim N_n(m, \Sigma)$

quelle est la loi de $Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_p \end{pmatrix} = AX + B$ avec $p \leq n$

$A = \underbrace{(\ \ )}_{n}\}p$, $B \in \mathbb{R}^p$

Idée : on connait la fonction caractéristique X

$\phi(u) = \exp(i\,{}^tum - \frac{1}{2}{}^tu\Sigma u)$

on calcule celle de $Y = AX + B$ et on espère reconnaitre le résultat

Preuve : fonction caractéristique de Y : $\tilde{\phi}(\tilde{u}) = E[e^{i{}^t\tilde{u}Y}]$

on a $\tilde{\phi}(\tilde{u}) = E[e^{i{}^t\tilde{u}(AX+B)}] = E[e^{i\underbrace{{}^t(\ )}_{{}^tA\tilde{u}}X}e^{i{}^t\tilde{u}B}]$

Or ${}^t\tilde{u}A = {}^t({}^tA\tilde{u})$

donc $\tilde{\phi}(\tilde{u}) = e^{i{}^t\tilde{u}B}\phi({}^tA\tilde{u}) = e^{i{}^t\tilde{u}B}\exp\left[i\,{}^t\tilde{u}Am - \frac{1}{2}{}^t\tilde{u}A\Sigma{}^tA\tilde{u}\right]$

$\Rightarrow Y \sim N_p(B+Am, A\Sigma{}^tA)$ dans la mesure où $A\Sigma{}^tA$ est symétrique définie positive

Rq : $Y = AX+B \Rightarrow E[Y] = A\underbrace{E[X]}_{m_X} + B = Am+B$.

$\Sigma_Y = E[(Y-E(Y))^t(Y-E[Y])]$

$= E[(AX+B-Am-B)^t(A(X-m))] = E[A(X-m)^t(X-m)^tA]$

$= A\underbrace{E[(X-m)^t(X-m)]}_{\Sigma}{}^tA = A\Sigma{}^tA$.

Conclusion : $X \sim N_n(m,\Sigma) \Rightarrow Y = AX+B \sim N_p(Am+B, A\Sigma{}^tA)$

pourvu que $A\Sigma{}^tA$ soit symétrique défini positive

i.e A de rang maximum.

Vérifions que $A\Sigma{}^tA$ est symétrique définie positive

en effet : . ${}^t(A\Sigma{}^tA) = \underbrace{{}^t({}^tA)}_{A}\underbrace{{}^t\Sigma}_{\Sigma}{}^tA = A\Sigma{}^tA$: $A\Sigma{}^tA$ toujours symétrique.

. $\underbrace{{}^ty\,(A}_{}\Sigma\underbrace{{}^tA)\,y}_{v} = {}^tv\Sigma v \geq 0$ car Σ positive.

. ${}^ty(A\Sigma{}^tA)y = 0 \overset{?}{\Rightarrow} y = 0$.

${}^ty(A\Sigma{}^tA)y = {}^tv\Sigma v = 0 \underset{\Sigma \text{ définie}}{\Rightarrow} v = 0$

$\Rightarrow {}^tAy = 0 \Rightarrow y = 0$

si ${}^tA$ est de rang maximum.

Rq : A l'aide du résultat précédent on montre facilement que si $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \sim N_n(m,\Sigma)$ alors $X_i \sim N(m_i, \Sigma_{ii})$

Réciproque fausse (voir TD3).

3. Lois marginales.

$X \sim N_n(m,\Sigma)$

$$X = \begin{pmatrix} X' \\ \hline X'' \end{pmatrix} \begin{matrix} \updownarrow p \\ \updownarrow n-p \end{matrix} \qquad m = \begin{pmatrix} m' \\ \hline m'' \end{pmatrix} \qquad \Sigma = \left(\begin{array}{c|c} \Sigma' & A \\ \hline {}^tA & \Sigma'' \end{array}\right)$$

conclusion : $X' \sim N_p(m', \Sigma')$

demo :

il suffit de voir que $X' = \underbrace{(I_p, 0)}_{C}\begin{pmatrix} X' \\ X'' \end{pmatrix}\begin{matrix} \updownarrow p \\ \updownarrow n-p \end{matrix}$ $\quad C = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \end{pmatrix} \updownarrow p$ de rang max p.

donc on peut appliquer les résultats du II, d'où :

$$X' \sim N_p\left((I_p, 0)\begin{pmatrix} m' \\ m'' \end{pmatrix} + 0, \underset{(I_p,0)}{C}\begin{pmatrix} \Sigma' & A \\ {}^tA & \Sigma'' \end{pmatrix} \underset{\begin{pmatrix} I_p \\ 0 \end{pmatrix}}{{}^tC}\right)$$

d'où $X' \sim N_p(m', \Sigma')$ cqfd.

I. Lois conditionnelles.

Si $X = \begin{pmatrix} X' \\ X'' \end{pmatrix}\begin{matrix} \}p \\ \}n-p \end{matrix} \sim N_n(m, \Sigma)$ alors $X' | X'' = x''$ est aussi un vecteur gaussien.

admis.

. Indépendance.

Si $X = \begin{pmatrix} X' \\ X'' \end{pmatrix} \sim N_n(m, \Sigma)$ avec $m = \begin{pmatrix} m' \\ m'' \end{pmatrix}$ et $\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma' & A \\ {}^tA & \Sigma'' \end{pmatrix}$

alors : X' et X'' indépendantes $\Leftrightarrow A = 0$. (ie $\mathrm{cov}(X_i, X_j) = 0$ $\forall j \in \{p+1, .., n\}$ $\forall i \in \{1, .. p\}$)

demo :

X' et X'' indépendantes $\overset{def}{\Leftrightarrow} f(x) = f(x', \cdot) f(\cdot, x'')$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\forall x' \in \mathbb{R}^p$, $\forall x'' \in \mathbb{R}^{n-p}$

$$\underset{(\text{ADMIS})}{\Leftrightarrow} \Phi_X(u) = \Phi_{X'}(u') \Phi_{X''}(u'') \quad \forall (u, u', u'')$$

(Rq: $\Phi_X(u) = E[e^{i\,{}^tuX}] = E[e^{i\,{}^t\binom{u'}{u''}\binom{X'}{X''}}] = E[e^{i\,{}^tu'X' + i\,{}^tu''X''}]$

$= E[e^{i\,{}^tu'X'} e^{i\,{}^tu''X''}] = \phi_{X'}(u') \phi_{X''}(u'')$)

donc $\Rightarrow$ évident, on admet seulement $\Leftarrow$

$$\Leftrightarrow \exp\left(i\,{}^tum - \frac{1}{2}{}^tu\Sigma u\right) = \exp\left(i\,{}^tu'm' - \frac{1}{2}{}^tu'\Sigma' u'\right) \exp\left(i\,{}^tu''m'' - \frac{1}{2}{}^tu''\Sigma'' u''\right)$$

or ${}^tum = {}^t\begin{pmatrix} u' \\ u'' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m' \\ m'' \end{pmatrix} = {}^tu'm' + {}^tu''m''$ donc ~~

$${}^tu\Sigma u = ({}^tu'\ {}^tu'')\begin{pmatrix} \Sigma' & A \\ {}^tA & \Sigma'' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u' \\ u'' \end{pmatrix}$$

$$= ({}^tu'\ {}^tu'')\begin{pmatrix} \Sigma'u' + Au'' \\ {}^tAu' + \Sigma''u'' \end{pmatrix}$$

$$= \cancel{{}^tu'\Sigma'u'} + {}^tu'Au'' + {}^tu''\,{}^tAu' + \cancel{{}^tu''\Sigma''u''} \text{ donc } ~~$$

$$\Leftrightarrow {}^tu'Au'' + \underbrace{{}^tu''\,{}^tAu'}_{\in \mathbb{R}} = 0 \quad \forall (u', u'').$$

donc ${}^tu''\,{}^tAu' = {}^t({}^tu''\,{}^tAu') = {}^tu'Au''$

$$\Leftrightarrow 2\,{}^tu'Au'' = 0 \quad \forall (u', u'')$$

$$\Leftrightarrow A = 0.$$

INP ENSEEIHT

COMPLEMENTS DE COURS

- **Loi du Chi2 à n degrés de liberté**

Définition : Si $X_1, ..., X_n$ sont n variables aléatoires indépendantes (variables aléatoires i.i.d.) et de même loi $\mathcal{N}(0,1)$,

alors $Y = \sum_{k=1}^{n} X_k^2$ suit une loi du Chi2 à n degrés de liberté

Notation :

$$Y \sim \chi_n^2$$

Densité de Probabilité :

$$f_n(y) = \frac{y^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}}}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} 1_{\mathbb{R}^+}(y)$$

Ce résultat peut se démontrer par récurrence. Pour $n = 1$, nous l'avons déjà fait dans la partie changement de variables continues. Ensuite, on cherche la loi de $Y + X_{n+1}^2$ (remarque : pour $n = 2$ ou $n = 3$, on peut faire un changement de variables avec les coordonnées polaires et les coordonnées sphériques respectivement).

Fonction Caractéristique

$$\varphi_Y(t) = \frac{1}{(1-2it)^{\frac{n}{2}}}$$

Moyenne et Variance

$$\begin{aligned} E[Y] &= n \\ VarY &= 2n \end{aligned}$$

En effet

$E[Y] = E\left[\sum_{k=1}^{n} X_k^2\right] = \sum_{k=1}^{n} E[X_k^2] = n$

$VarY = \sum_{k=1}^{n} VarX_k^2 = \sum_{k=1}^{n} \left(E[X_k^4] - E[X_k^2]^2\right) = \sum_{k=1}^{n} (3-1) = 2n$

Propriété d'additivité

$$\left\{ \begin{array}{l} X \sim \chi_n^2 \\ Y \sim \chi_m^2 \\ X \text{ et } Y \text{ indépendantes} \end{array} \right. \Longrightarrow X + Y \sim \chi_{n+m}^2$$

- **Loi de Student à n degrés de liberté ($Z \sim t_n$)**

Définition

$$\left\{\begin{array}{l} X \sim \mathcal{N}(0,1) \\ Y \sim \chi_n^2 \\ X \text{ et } Y \text{ indépendantes} \end{array}\right. \Longrightarrow Z = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}} \sim t_n$$

Densité

$$f_n(z) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{1}{\left(1+\frac{z^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}} \qquad z \in \mathbb{R}$$

Moyenne et Variance

Dès que $n > 2$, on a

$$\begin{aligned} E[Z] &= 0 \\ VarZ &= \frac{n}{n-2} \end{aligned}$$

Loi de Cauchy

Pour $n = 1$, la loi suivie par $Z = \frac{X}{\sqrt{Y}}$ porte le nom de la loi de CAUCHY. Sa densité est

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+z^2} \qquad z \in \mathbb{R}$$

Une telle loi ne possède aucun moment et en particulier pas de moyenne et pas de variance.

- **Loi de Fisher-Snédécor à n et m degrés de libertés ($Z \sim f_{n,m}$)**

Définition

$$\left\{\begin{array}{l} X \sim \chi_n^2 \\ Y \sim \chi_m^2 \\ X \text{ et } Y \text{ indépendantes} \end{array}\right. \Longrightarrow Z = \frac{X/n}{Y/m} \sim f_{n,m}$$

Densité

$$f_n(z) = \frac{n}{m} \frac{1}{\beta\left(\frac{n}{2}, \frac{m}{2}\right)} \frac{\left(\frac{n}{n} z\right)^{\frac{n}{2}-1}}{\left(1+\frac{n}{n} z\right)^{\frac{n+m}{2}}} \qquad z \in \mathbb{R}^+$$

avec $\beta(n,m) = \frac{\Gamma(n)\Gamma(m)}{\Gamma(n+m)}$.

Moyenne et Variance

Dès que $m > 4$, on a

$$\begin{aligned} E[Z] &= \frac{m}{m-2} \\ VarZ &= \frac{2m^2(n+m-2)}{n(m-4)(m-2)^2} \end{aligned}$$