PROBABILITES

Chap 5 — Convergence et théorèmes limites

I. Convergence en loi

Définition : On dit que la suite de va $X_1, \dots, X_n$ cv en loi vers la va X si la suite des fonctions de répartition $F_n(x)$ cv simplement vers la fonction de répartition de X notée $F(x) = P[X<x]$ en tout point x où F est continue

Notation : $X_n \xrightarrow[n\infty]{L} X$

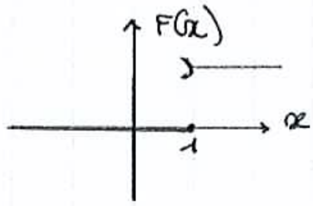
exemple :

$X_n \to 0 \quad P[X_n=0] = \frac{1}{n}$

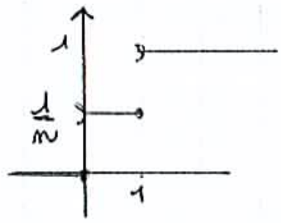
$X_n \to 1 \quad P[X_n=1] = \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$

MQ $X_n \xrightarrow[n\infty]{L} 1 = X$

$F(x) = P[X<x]$



$$F_n(x) = P[X_n<x] = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0 \\ \frac{1}{n} \text{ si } x \in]0,1] \\ 1 \text{ si } x > 1 \end{cases}$$



- si $x \leq 0$ $F_n(x) = 0 \xrightarrow[n\infty]{} 0 = F(x)$
- si $x \in]0,1[$ $F_n(x) = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\infty]{} 0 = F(x)$
- si $x > 1$ $F_n(x) = 1 \xrightarrow[n\infty]{} 1 = F(x)$

il y a cv simple de $F_n(x)$ vers $F(x)$ en tout point $x \neq 1$.

Propriétés : ① THÉORÈME DE LEVY

$$X_n \xrightarrow[n\infty]{L} X \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi_n(t) = E[e^{itX_n}] \xrightarrow[n\infty]{} \varphi(t) = E[e^{itX}] \quad \forall t \\ \varphi \text{ continue en } t=0 \end{cases}$$

Dans l'exemple précédent $\varphi_n(t) = E[e^{itX_n}] = e^{it0}P[X_n=0] + e^{it1}P[X_n=1]$

$$\boxed{\varphi_n(t) = \frac{1}{n} + e^{it}\left(1 - \frac{1}{n}\right)}$$

$$\boxed{\varphi_n(t) \xrightarrow[n\infty]{} e^{it}}$$

or $\varphi(t) = E[e^{it1}] = e^{it}$ continue en $t=0$.

② si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de va continues de densité $f_n(x)$ et que $f_n(x) \xrightarrow[n\infty]{} f(x)$ presque partout.

alors $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{L} X$ où X est une v.a. de densité $f(x)$.

Rq : c'est une CS et pas une CNS.

③ si $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{L} X$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, alors $g(X_n) \xrightarrow[n\to\infty]{L} g(X)$

Commentaire : la cv en loi est souvent utilisée ds les thm limite (cf fin du chapitre).

II Convergence en probabilité

Définition : on dit que X_n cv en proba vers X et on note

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} X \text{ ssi } \forall \varepsilon > 0 \quad P[|X_n - X| > \varepsilon] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

exemple : X_n de densité $f_n(x) = \dfrac{n e^{-nx}}{(1+e^{-nx})^2}$ $\quad x \in \mathbb{R}$

on vérifie bien $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x) = 0$

MQ $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0$

$$P[|X_n - X| > \varepsilon] = P[|X_n| > \varepsilon] = 1 - \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} f_n(x)\,dx$$

$$= 1 - \int_{-\varepsilon}^{+\infty} \frac{n e^{-nx}}{(1+e^{-nx})^2} = 1 - \left[\frac{1}{1+e^{-nx}}\right]_{\varepsilon}^{+\varepsilon}$$

$\varepsilon > 0$.

$$= 1 - \underbrace{\frac{1}{1+e^{-n\varepsilon}}}_{\to 1} + \underbrace{\frac{1}{1+e^{n\varepsilon}}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Propriété : si $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} X$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, alors $g(X_n) \xrightarrow[n\to\infty]{P} g(X)$.

III Convergence en moyenne quadratique.

c'est celle-là qui sert !

Définition : on dit que X_n cv en moyenne quadratique vers X et on note $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{MQ} X$ ssi $E[|X_n - X|^2] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

exemple

① $\begin{cases} P[X_n = n] = \frac{1}{n^3} \\ P[X_n = 0] = 1 - \frac{1}{n^3} \\ X_n \xrightarrow{MQ} 0\,? \end{cases}$

② $\begin{cases} P[X_n = n] = \frac{1}{n^2} \\ P[X_n = 0] = 1 - \frac{1}{n^2} \\ X_n \xrightarrow{MQ} 0\,? \end{cases}$

(1) $E[X_n^2] = 0^2\left(1-\frac{1}{n^3}\right) + n^2\left(\frac{1}{n^3}\right) = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\infty]{} 0$ donc $X_n \xrightarrow[n\infty]{MQ} 0$

(2) $E[X_n^2] = 0^2\left(1-\frac{1}{n^3}\right) + n^2\left(\frac{1}{n^2}\right) = 1 \underset{n\infty}{\not\rightarrow} 0$ donc $X_n \underset{n\infty}{\overset{MQ}{\not\rightarrow}} 0$

II Convergence presque sure

Définition on dit que X_n cv presque sûrement vers X et on note $X_n \xrightarrow[n\infty]{PS} X$ si $X_n(w) \xrightarrow[n\infty]{} X(w)$ $\forall w \in A \,/\, P(A) = 1$

I Comparaison

$$\begin{tikzcd}
MQ \arrow[dr] & & P.S \arrow[dl] \\
& P \arrow[d, shift right] & \\
& L \arrow[u, shift right] &
\end{tikzcd}$$

si X_n cv en loi vers une constante alors X_n cv en proba vers une constante.

Compléments de Cours
Théorèmes Limites

Loi faible des grands nombres

Theorem 1 *Si $X_1, ..., X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes et de même loi de moyenne $E[X_k] = m$, alors la variable aléatoire $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ converge en probabilité vers m.*

Preuve : Il est équivalent de montrer que $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ converge en loi vers $m = E[X_k]$. Pour ce, étudions la fonction caractéristique de $\overline{X}$:

$$\begin{aligned}
\varphi_{\overline{X}}(t) &= E\left[e^{it\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k}\right] \\
&= E\left[\prod_{k=1}^{n} e^{i\frac{t}{n}X_k}\right] \\
&= \prod_{k=1}^{n} E\left[e^{i\frac{t}{n}X_k}\right] \text{ (indépendance des variables } X_k\text{)} \\
&= \left[\varphi\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n \text{ (les varriables } X_k \text{ ont la même fonction caractéristique)} \qquad (1)
\end{aligned}$$

Lorsque le premier moment d'une variable aléatoire X existe, la fonction caractéristique $\varphi_X(t)$ est une fois dérivable et on a $\varphi^{(k)}(0) = i^k E\left[X^k\right]$ pour $k \in \{0, 1\}$. En appliquant la formule de Tayor à la fonction φ, on obtient :

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= \varphi(0) + t\varphi'(0) + t\lambda(t) \\
&= 1 + itm + t\lambda(t)
\end{aligned}$$

avec $\lim_{t\to 0} \lambda(t) = 0$. En utilisant le développement de Taylor de φ et l'expression (1), on obtient :

$$\begin{aligned}
\ln\left[\varphi_{\overline{X}}(t)\right] &= n\ln\left[1 + i\frac{t}{n}m + \frac{t}{n}\lambda\left(\frac{t}{n}\right)\right] \\
&= n\left[i\frac{t}{n}m + \frac{t}{n}\lambda\left(\frac{t}{n}\right)\right] \\
&= itm + t\lambda\left(\frac{t}{n}\right)
\end{aligned}$$

On a donc,

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{\overline{X}}(t) = e^{itm} \qquad \forall t$$

Mais, e^{itm} est la fonction caractéristique de la variable constant $X = m$. On en conclut d'après le théorème de Levy que

$$\overline{X} \xrightarrow{L} m \Leftrightarrow \overline{X} \xrightarrow{P} m$$

Loi des grands nombres dans L_2

Theorem 2 *Si $X_1, ..., X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes et de même loi de moyenne $m < \infty$ et de variance $\sigma^2 < \infty$, alors la variable aléatoire $\overline{X}$ converge en moyenne quadratique vers m.*

Preuve : On a

$$\begin{aligned} E\left[\left(\overline{X}-m\right)^2\right] &= E\left[\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} m\right)^2\right] \\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} E\left[(X_k - m)(X_l - m)\right] \end{aligned}$$

Mais

$$E\left[(X_k - m)(X_l - m)\right] = \begin{cases} \sigma^2 \text{ si } k = l \\ 0 \text{ si } k \neq l \end{cases}$$

Donc

$$E\left[\left(\overline{X}-m\right)^2\right] = \frac{\sigma^2}{n} \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

Remark 1 *Convergence de la moyenne empirique vers la moyenne de la loi.*

Théorème de la limite centrale

Theorem 3 *: Si $X_1, ..., X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes et de même loi de moyenne $m < \infty$ et de variance $\sigma^2 < \infty$, alors la variable aléatoire centrée réduite $Y_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - nm}{\sqrt{n\sigma^2}}$ converge en loi vers la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.*

Preuve : La fonction caractéristique de Y_n s'écrit :

$$\begin{aligned}
\varphi_{Y_n}(t) &= E\left[e^{itY_n}\right] = e^{-\frac{itm\sqrt{n}}{\sigma}} E\left[\prod_{k=1}^{n} e^{i\frac{t}{\sqrt{n\sigma^2}}X_k}\right] \\
&= e^{-\frac{itm\sqrt{n}}{\sigma}} \prod_{k=1}^{n} E\left[e^{i\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}X_k}\right] \text{ (indépendance des variables } X_k) \\
&= e^{-\frac{itm\sqrt{n}}{\sigma}} \left[\varphi\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right]^n \text{ (les variables } X_k \text{ ont la même fonction caractéristique)} \quad (2)
\end{aligned}$$

Lorsque les deux premiers moments d'une variable aléatoire X existent, la fonction caractéristique $\varphi_X(t)$ est deux fois dérivable et on a $\varphi^{(k)}(0) = i^k E\left[X^k\right]$, pour $k \in \{0,1,2\}$. En appliquant la formule de Tayor à la fonction φ, on obtient :

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= \varphi(0) + t\varphi'(0) + \frac{t^2}{2}\varphi''(0) + t^2\lambda(t) \\
&= 1 + itm - \left(m^2 + \sigma^2\right)\frac{t^2}{2} + t^2\lambda(t)
\end{aligned}$$

avec $\lim_{t\to 0} \lambda(t) = 0$. En utilisant le développement de Taylor de φ et l'expression (2), on obtient :

$$\begin{aligned}
\ln\left[\varphi_{Y_n}(t)\right] &= -\frac{itm\sqrt{n}}{\sigma} + n\ln\left[1 + i\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}m - \frac{(m^2+\sigma^2)}{2}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)^2 + \left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)^2\lambda\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right] \\
&= -\frac{itm\sqrt{n}}{\sigma} + n\left[i\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}m - \frac{(m^2+\sigma^2)}{2}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(i\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}m\right)^2 + \frac{t^2}{n}\lambda\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right] \\
&= -\frac{t^2}{2} + \frac{t^2}{n}\lambda\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)
\end{aligned}$$

Donc, on a

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{Y_n}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} \qquad \forall t$$

Puisque $e^{-\frac{t^2}{2}}$ est la fonction caractéristique de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$, en utilisant le théorème de Levy, on en déduit

$$\boxed{Y_n \xrightarrow{L} \mathcal{N}(0,1)}$$

Remark 2 *La convergence vers la loi normale est assurée sous des hypothèses moins fortes comme les conditions de Liapounov ou Lindeberg (voir livre de Renyi, Calcul de Probabilités, Dunod, Paris, 1966, page 414).*

Remark 3 *Théorème de la limite centrale multivarié : Soit* X_k *une suite de vecteurs aléatoires définis sur* $(\mathbb{R}^p, \mathcal{B}(\mathbb{R}^p))$ *indépendants et de même loi de vecteur moyenne* $m \in \mathbb{R}^p$ *et de matrice de covariance* $\Sigma \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$*, alors*

$$\sqrt{n}\left[\sum_{k=1}^{n} X_k - nm\right] \xrightarrow{L} \mathcal{N}(0, \Sigma)$$