CORRECTION EXAMEN LUNDI 14/11/2016

EXERCICE 1 : LOI GÉOMÉTRIQUE

1) $$P[X>k] = \sum_{l=k+1}^{+\infty} p(1-p)^{l-1} = p(1-p)^k \underbrace{\left[1+(1-p)+(1-p)^2+\cdots\right]}_{\frac{1}{1-(1-p)}=\frac{1}{p}}$$

donc $P[X>k]=(1-p)^k = \boxed{q^k}$

2) $$P[X=k] = P(X>k-1) - P(X>k) = q^{k-1}-q^k = q^{k-1}(1-q) = \boxed{pq^{k-1}}$$

On retrouve l'expression de la probabilité d'une loi géométrique

3) $$P[Z>k] = P[\mathrm{Min}(X,Y)>k] = P(X>k \text{ et } Y>k)$$

X et Y indépendantes $\Rightarrow P[Z>k]=P[X>k]\,P[Y>k] = q^k q^k = \boxed{(q^2)^k}$

En utilisant la question 2), on en déduit que $Z=\mathrm{Min}(X,Y)$ suit une loi géométrique de paramètre q^2

4) La fonction caractéristique de Z est

$$\phi_Z(t) = E[e^{itZ}] = E[e^{it(X+Y-2)}] = E[e^{itX}e^{itY}e^{-2it}]$$

X et Y indépendantes $\Rightarrow \phi_Z(t) = e^{-2it}\phi_X(t)\phi_Y(t)$

Donc $$\phi_Z(t) = e^{-2it}\frac{pe^{it}}{1-qe^{it}}\,\frac{pe^{it}}{1-qe^{it}} = \frac{p^2}{(1-qe^{it})^2}$$

On reconnait la fonction caractéristique d'une loi binomiale négative de paramètres p et $n=2$

EXERCICE 2 : ESTIMATION

1) $Y=-\ln X \Leftrightarrow X = e^{-Y}$ est un changement de variables bijectif de $]0,1[$ dans $]0,+\infty[$. En utilisant le théorème du changement de variables, on en déduit la densité de Y :

$$g(y) = \frac{1}{\theta}\left[e^{-y}\right]^{\frac{1}{\theta}-1} \left|\underbrace{\frac{dx}{dy}}_{-e^{-y}}\right| = \frac{1}{\theta}e^{-\frac{y}{\theta}}$$

c'est-à-dire $\boxed{g(y) = \frac{1}{\theta}e^{-y/\theta} I_{]0,+\infty[}(y)}$, où $I_{]0,+\infty[}(y)$ est la fonction indicatrice sur $]0,+\infty[$

On reconnait une loi gamma de paramètres $\frac{1}{\theta}$ et 1, i.e,

$$\boxed{Y \sim \Gamma\left(\frac{1}{\theta}, 1\right)}$$

2) La vraisemblance de l'échantillon est

$$L(x_1, \dots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{\theta} x_i^{\frac{1}{\theta}-1}\right) = \frac{1}{\theta^n} \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{\theta}-1}$$

Son logarithme s'écrit

$$\ln L(x_1, \dots, x_n; \theta) = -n \ln \theta + \left(\frac{1}{\theta} - 1\right) \sum_{i=1}^{n} \ln x_i$$

On cherche le maximum de cette fonction L en cherchant le signe de $\frac{\partial \ln L}{\partial \theta}$. On a

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} \geq 0 \iff -\frac{n}{\theta} - \frac{1}{\theta^2} \sum_{i=1}^{n} \ln x_i \geq 0$$

$$\iff \theta < -\frac{1}{n} \sum \ln x_i$$

d'où le tableau de variations

θ	0		$-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln x_i$		$+\infty$
$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta}$		$+$	0	$-$	
$\ln L$		$\nearrow$		$\searrow$	

Donc la vraisemblance L admet un maximum global unique au point $\theta = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln x_i$. On en déduit

$$\boxed{\hat{\theta}_{MV} = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln X_i} \boxed{= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_i}$$

3) On a vu que $Y_i \sim \Gamma\left(\frac{1}{\theta}, 1\right)$ donc d'après la table

$$E[Y_i] = \theta \text{ et } Var[Y_i] = \theta^2$$

On en déduit

$$E[\hat{\theta}_{MV}] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \underbrace{E(Y_i)}_{\theta} = \theta \Rightarrow \underline{\hat{\theta}_{MV} \text{ estimateur non biaisé de } \theta}$$

$$Var[\hat{\theta}_{MV}] = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \underbrace{Var Y_i}_{\theta^2} = \frac{\theta^2}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

$\hat{\theta}_{MV}$ non biaisé
$Var\, \hat{\theta}_{MV} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ | donc $\underline{\hat{\theta}_{MV} \text{ estimateur convergent de } \theta}$

4) On a $\dfrac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta^2} = \dfrac{n}{\theta^2} + \dfrac{2}{\theta^3}\sum_{i=1}^{n} \ln x_i$

donc $E\left[\dfrac{\partial^2 \ln L(x_1,\dots,x_n;\theta)}{\partial \theta^2}\right] = \dfrac{n}{\theta^2} + \dfrac{2}{\theta^3}\sum_{i=1}^{n} \underbrace{E[\ln x_i]}_{-E[Y_i] = -\theta}$

$$= \frac{n}{\theta^2} - \frac{2n}{\theta^2} = -\frac{n}{\theta^2}$$

donc la borne de Cramér-Rao d'un estimateur non biaisé de θ est

$$\boxed{BCR = \frac{\theta^2}{n}}$$

$E[\hat{\theta}_{MV}] = \theta$
$Var[\hat{\theta}_{MV}] = BCR$ donc $\boxed{\hat{\theta}_{MV} \text{ est l'estimateur efficace de } \theta}$

5) On a

$$E[X_i] = \int_0^1 \frac{1}{\theta} u^{\frac{1}{\theta}} du = \frac{1}{\theta}\left[\frac{u^{\frac{1}{\theta}+1}}{\frac{1}{\theta}+1}\right]_0^1 = \frac{\frac{1}{\theta}}{\frac{1}{\theta}+1} = \frac{1}{1+\theta}$$

d'où $\boxed{\theta = \dfrac{1}{E[X_i]} - 1}$

On en déduit un estimateur des moments en remplaçant $E[X_i]$ par $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, i.e.,
$$\boxed{\hat{\theta}_{MO} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} X_i} - 1}$$

EXERCICE 3 – TEST STATISTIQUE

1) Le test de Neyman-Pearson est défini par

Rejet de H_0 si $\dfrac{L(x_1,\dots,x_n;\theta_1)}{L(x_1,\dots,x_n;\theta_0)} = \dfrac{\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta_1} x_i^{\frac{1}{\theta_1}-1}}{\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta_0} x_i^{\frac{1}{\theta_0}-1}} > K_\alpha$

c'est-à-dire rejet de H_0 si $\dfrac{1}{\theta_1}\sum_{i=1}^{n} \ln x_i - \dfrac{1}{\theta_0}\sum_{i=1}^{n} \ln x_i > K'_\alpha$

Puisque $\theta_1 > \theta_0$, on a $\frac{1}{\theta_1} < \frac{1}{\theta_0}$ et donc

$$\boxed{\text{Rejet de } H_0 \text{ si } \sum_{i=1}^{n} \underbrace{-\ln x_i}_{y_i} > S_\alpha}$$

2) $T = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ donc la fonction caractéristique de T s'écrit

$$\phi_T(t) = \prod_{i=1}^{n} \phi_{Y_i}(t) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1-it\theta} = \frac{1}{(1-it\theta)^n}$$

On reconnait la fonction caractéristique d'une loi $\Gamma(\theta^{-1}, n)$

donc $\boxed{T \sim \Gamma(\frac{1}{\theta}, n)}$

3) • D'après la table $E[T] = n\theta$ et $Var[T] = n\theta^2$ - le théorème de la limite centrale s'écrit donc

$$\frac{T - n\theta}{\sqrt{n\theta^2}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i - n\theta}{\sqrt{n\theta^2}} \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} N(0,1)$$

Pour n grand, on peut donc approcher la loi de T par une loi normale $N(n\theta, n\theta^2)$

• Le risque de première espèce est

$$\alpha = P[\text{Rejeter } H_0 \mid H_0 \text{ vraie}] = P[T > k\alpha \mid \theta = \theta_0]$$

donc
$$\alpha = P\left[\frac{T - n\theta_0}{\sqrt{n\theta_0^2}} > \frac{k\alpha - n\theta_0}{\sqrt{n\theta_0^2}} \;\middle|\; \frac{T - n\theta_0}{\sqrt{n\theta_0^2}} \simeq N(0,1) \right]$$

on en déduit
$$\boxed{\alpha = 1 - F\left(\frac{k\alpha - n\theta_0}{\sqrt{n\theta_0^2}}\right)} \quad (1)$$

• La puissance du test est

$$\pi = 1 - \beta = P[\text{Rejeter } H_0 \mid H_1 \text{ vraie}] = P(T > k_\alpha \mid \theta = \theta_1)$$

donc
$$\boxed{\pi = 1 - F\left(\frac{k\alpha - n\theta_1}{\sqrt{n\theta_1^2}}\right)} \quad (2)$$

• (1) permet d'obtenir

$$k\alpha = n\theta_0 + \sqrt{n\theta_0^2}\, F^{-1}(1-\alpha)$$

d'où
$$\pi = 1 - F\left[\frac{n(\theta_0 - \theta_1)}{\sqrt{n\theta_1^2}} + \frac{\theta_0}{\theta_1} F^{-1}(1-\alpha) \right]$$

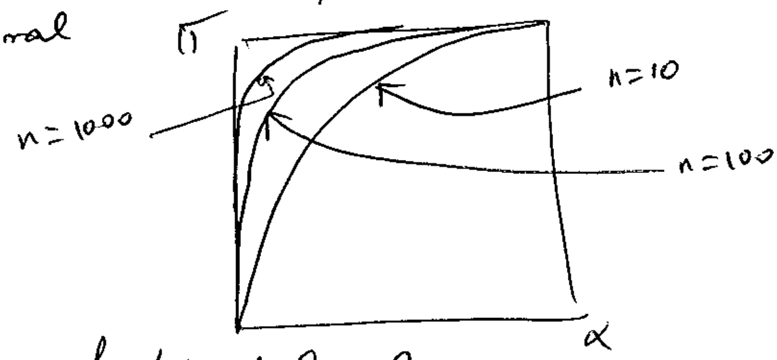
(5)

Soit $$\boxed{\Pi = 1 - F\left[\frac{\sqrt{n}(\theta_0 - \theta_1)}{\theta_1} + \frac{\theta_0}{\theta_1} F^{-1}(1-\alpha)\right]}$$

Analyse en fonction de n

Puisque $\theta_1 > \theta_0$, $\sqrt{n}\left(\frac{\theta_0 - \theta_1}{\theta_1}\right) < 0$

Donc quand n augmente, puisque F est une fonction croissante, Π augmente et donc la performance du test s'améliore, ce qui est normal



Analyse en fonction de θ_0 et θ_1

$$\Pi = 1 - F\left[\sqrt{n}\left(\frac{\theta_0}{\theta_1} - 1\right) + \frac{\theta_0}{\theta_1} F^{-1}(1-\alpha)\right]$$

$$= 1 - F\left[\frac{\theta_0}{\theta_1}\left(\sqrt{n} + F^{-1}(1-\alpha)\right) - \sqrt{n}\right]$$

Quand $\frac{\theta_1}{\theta_0}$ augmente, $\frac{\theta_0}{\theta_1}$ diminue ~~donc F diminue~~

donc $F\left[\frac{\theta_0}{\theta_1}\left(\sqrt{n} + F^{-1}(1-\alpha)\right) - \sqrt{n}\right]$ diminue

donc Π augmente

et donc la performance du test s'améliore, ce qui est normal