Exercice 1

1) Le changement de variables est bijectif de $]0,1[$ dans $]0,1[$ puisque

$$Y = X^2,\ X \in]0,1[\iff X = \sqrt{Y},\ Y \in]0,1[$$

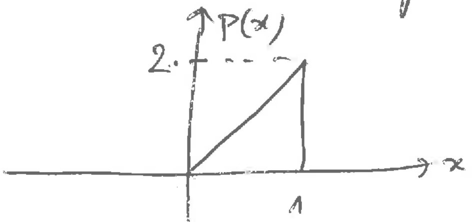
Le théorème du changement de variables nous permet d'obtenir la densité de Y

$$\Pi(y) = 2\left[\sqrt{y}\right]|J| \quad \text{avec } J = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

d'où

$$\Pi(y) = \mathbb{1}_{]0,1[}(y)$$ qui est la loi uniforme sur $]0,1[$

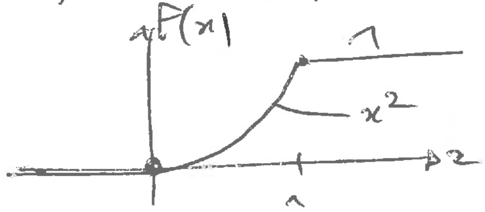
2) La densité de X est représentée ci-dessous



Donc la fonction de répartition de X vérifie $F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(u)\,du = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x > 1 \\ \int_0^x 2u\,du & x \in]0,1[\end{cases}$

Donc ~~$x \in]0,1[$~~ $F(x) = x^2$, pour $x \in]0,1[$

d'où la représentation graphique suivante



La fonction de répartition de Y notée G est définie par

$$G(y) = P[Y < y] = P[X^2 < y] = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ 1 & \text{si } y > 1 \\ P[X < \sqrt{y}] = \int_0^{\sqrt{y}} 2u\,du & \text{si } y \in]0,1[\end{cases}$$

Mais $\int_0^{\sqrt{y}} 2u\,du = \left[u^2\right]_0^{\sqrt{y}} = y$

Donc

$$G(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ 1 & y > 1 \\ y & y \in]0,1[\end{cases}$$

On retrouve la densité de Y par dérivation de G

$$\Pi(y) = G'(y) = \boxed{\mathbb{1}_{[0,1]}(y)}$$ 0,5

3) La fonction caractéristique de Y est définie par

$$\phi_Y(t) = E[e^{itY}] = E[e^{itX^2}] = \int_0^1 2x e^{itx^2} dx$$

En faisant le changement de variables $u = x^2$, on obtient $(x = \sqrt{u})$

$$\phi_Y(t) = \int_0^1 \cancel{2\sqrt{u}}\, e^{itu} \frac{1}{\cancel{2\sqrt{u}}} du = \left[\frac{e^{itu}}{it}\right]_0^1$$

d'où

$$\boxed{\phi_Y(t) = \frac{e^{it} - 1}{it}}$$ 1

c'est la fonction caractéristique d'une loi uniforme sur $[0,1]$ donc
<u>Y suit une loi uniforme sur $[0,1]$</u>

Exercice 2

1) $\begin{cases} Z = X+Y \\ T = X \end{cases} \iff \begin{cases} X = T \\ Y = Z - T \end{cases}$

donc le changement de variables $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} Z \\ T \end{pmatrix}$ est <u>bijectif</u> 0,5

le Jacobien de la transformation est

$|\det(J)|$ avec $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow |\det(J)| = 1$ 0,5

d'où la densité du couple (Z,T)

$$\Pi(z,t) = 1 \times 1 \quad (z,t) \in \Delta$$ 0,5

En effet puisque X et Y sont <u>indépendantes</u>, $p(x,y) = p(x,\cdot)\,p(\cdot,y)$

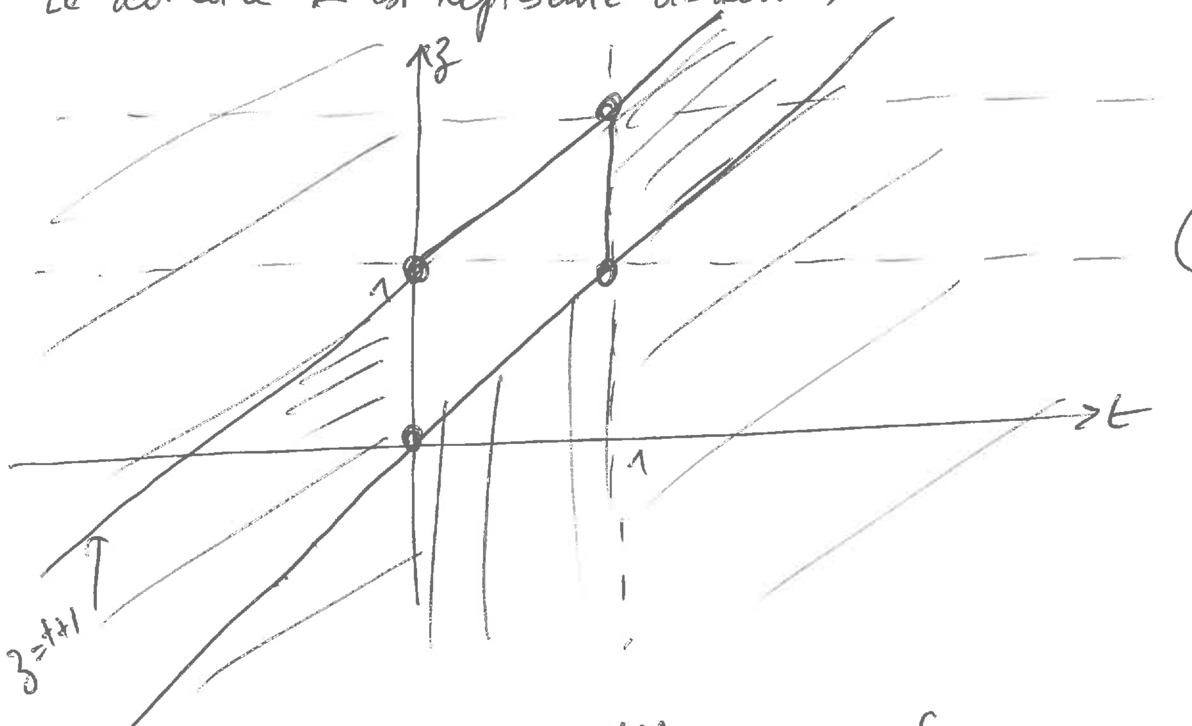
c'est-à-dire

$$p(x,y) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in [0,1] \text{ et } y \in [0,1] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

<u>Recherche du domaine Δ</u>

$$\begin{cases} 0 < x < 1 \\ 0 < y < 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 0 < t < 1 \\ 0 < z - t < 1 \end{cases} \iff \begin{cases} t > 0 \\ t < 1 \\ z > t \\ z < t+1 \end{cases}$$ 0,5

Le domaine Δ est représenté ci-dessous

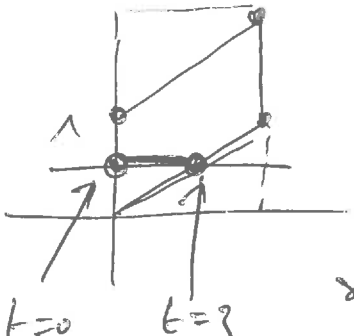


1

C'est donc un parallélogramme et (Z,T) a une loi uniforme sur ce parallélogramme.

2) On remarque d'après le domaine représenté ci dessus que $z \in [0,2]$ (ce qui est normal car $Z = X+Y$, avec $X \in [0,1]$ et $Y \in [0,1]$)

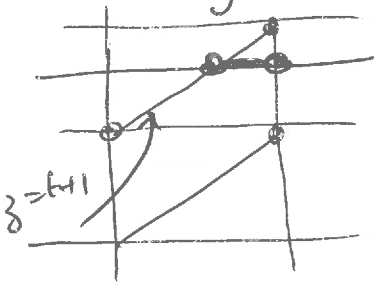
Pour $z \in [0,1]$, on observe que l'on doit intégrer la loi de (z,t) sur le domaine $[t=0,\ t=z]$ (voir dessin ci-dessous)



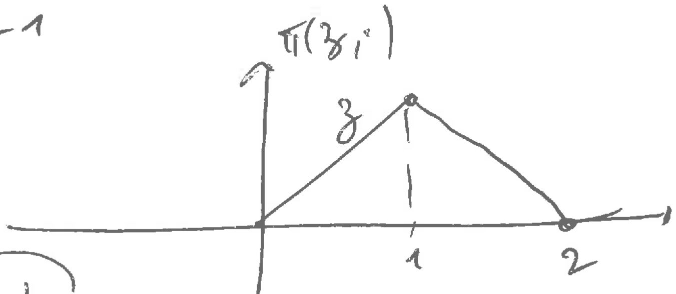
Donc $\pi(z,\cdot) = \int_{\mathbb{R}} \pi(z,t) = \int_0^z 1\,dt = z$

si $z \in [1,2]$ on doit intégrer sur le domaine $[t = z-1,\ t=1]$ soit

$$\pi(z,\cdot) = \int_{z-1}^{1} 1\,dt = 2-z$$



On en déduit la densité de z



2pts

Exercice 3 4

1) La vraisemblance de $(X_1, \dots, X_n)$ est définie par

$$L(x_1 \dots x_n ; \theta) = \prod_{i=1}^{n} \theta^{x_i} (1-\theta)^{1-x_i}$$

$$= \boxed{\theta^{\sum_{i=1}^{n} x_i} (1-\theta)^{n - \sum_{i=1}^{n} x_i}}$$

La log-vraisemblance s'écrit

$$\ln L(x_1 \dots x_n ; \theta) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \ln \theta + \left(n - \sum_{i=1}^{n} x_i\right) \ln(1-\theta)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} \geq 0 \iff \frac{n\bar{x}}{\theta} + \frac{n - n\bar{x}}{1-\theta}(-1) \geq 0$$

on pose $\sum_{i=1}^{n} x_i = n\bar{x}$

En multipliant par $\theta(1-\theta) \geq 0$, on obtient

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} \geq 0 \iff n\bar{x}(1-\theta) \geq n(1-\bar{x})\theta$$

$$\iff \cancel{n}\bar{x} \geq \cancel{n\bar{x}\theta} + \cancel{n}\theta - \cancel{n\bar{x}\theta}$$

$$\iff \theta \leq \bar{x}$$

2,5

θ	0		$\bar{x}$		$+\infty$
$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta}$		$+$	0	$-$	
$\ln L$		$\nearrow$		$\searrow$	

Donc $\theta = \bar{x}$ est bien un maximum global unique de la vraisemblance

donc $\boxed{\hat{\theta}_{MV} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{X}}$

2) $E[\hat{\theta}_{MV}] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \underbrace{E(X_i)}_{\theta} = \frac{n\theta}{n} = \theta$ donc $\hat{\theta}_{MV}$ non biaisé 0,5

$\mathrm{Var}\,\hat{\theta}_{MV} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \underbrace{\mathrm{Var}\,X_i} = \boxed{\frac{\theta(1-\theta)}{n}}$ 0,5

Biais $= 0$
$Var\,\hat{\theta}_{MV} \to 0$ $\Rightarrow$ donc $\boxed{\hat{\theta}_{MV} \text{ est convergent}}$

3– On a vu

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = \frac{n\bar{x}}{\theta} + \frac{n(1-\bar{x})}{1-\theta}(-1) \qquad \left(\frac{1}{\theta-1}\right)' = \frac{-1}{(\theta-1)^2}$$

donc
$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta^2} = -\frac{n\bar{x}}{\theta^2} + \frac{n(1-\bar{x})}{(\theta-1)^2}(-1)$$

d'où
$$E\left[\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta^2}\right] = -\frac{n}{\theta} - \frac{n(1-\theta)}{(1-\theta)^2} = \frac{-n}{\theta} - \frac{n}{1-\theta} = -n\underbrace{\left(\frac{1}{\theta}+\frac{1}{1-\theta}\right)}_{\frac{1}{\theta(1-\theta)}}$$

La borne de Cramer–Rao d'un estimateur non biaisé de θ est donc

$$\boxed{BCR = \frac{\theta(1-\theta)}{n}}$$ (1pt)

$Var\,\hat{\theta}_{MV} = BCR$ donc $\hat{\theta}_{MV}$ est l'estimateur efficace de θ
$\hat{\theta}_{MV}$ non biaisé

4) $E[X_i] = \theta$ donc un estimateur des moments de θ est

$$\boxed{\hat{\theta}_{MO} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i}$$ (1pt)

On retrouve l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ.

$\theta^{x_i}(1-\theta)^{1-x_i}$

1

$X_i \to 0 \quad 1-\theta$

$\to 1 \quad \theta$

$E[X_i] = \theta$

$H_0 \quad \theta = \theta_0$

$H_1 \quad \theta = \theta_1$

1) Rejet de H_0 si $\dfrac{\theta_1^{\sum x_i}(1-\theta_1)^{n-\sum x_i}}{\theta_0^{\sum x_i}(1-\theta_0)^{n-\sum x_i}} >$ seuil

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i\right) \ln\left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right) + \left(n - \sum x_i\right) \ln\left(\frac{1-\theta_1}{1-\theta_0}\right) >$$

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i\right) \ln\left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\frac{1-\theta_0}{1-\theta_1}\right) > -$$

si $\theta_1 > \theta_0$ $\quad \frac{\theta_1}{\theta_0} > 1$

$1-\theta_1 < 1-\theta_0$ $\quad \frac{1-\theta_0}{1-\theta_1} > 1$

$\theta_1 > \theta_0$

Rejet de H_0 si $\sum_{i=1}^n X_i > S_\alpha$

$\theta_1 < \theta_0$

Rejet de H_0 si $\sum X_i < S_\alpha$

2 pts

$\boxed{\theta_1 > \theta_0}$

2) Central-limite

$$\sum_{i=1}^n X_i \sim N(n\theta, n\theta(1-\theta))$$

$$\alpha = P\left[\frac{\sum X_i - n\theta_0}{\sqrt{n\theta_0(1-\theta_0)}} > \frac{S_\alpha - n\theta_0}{\sqrt{}} \mid N(0,1)\right]$$

$$\alpha = 1 - F\left[\frac{S_\alpha - n\theta_0}{\sqrt{n\theta_0(1-\theta_0)}}\right] \quad \text{ou} \quad \boxed{S_\alpha = F^{-1}(1-\alpha)\sqrt{n\theta_0(1-\theta_0)} + n\theta_0}$$

$$\beta = P\left[\sum X_i < S_\alpha \mid \theta = \theta_1\right]$$

$$\beta = F\left[\frac{S_\alpha - n\theta_1}{\sqrt{n\theta_1(1-\theta_1)}}\right.$$

$\boxed{\theta_1 < \theta_0}$ $\boxed{\alpha = F\left[\frac{S\alpha - n\theta_0}{\sqrt{n\theta_0(1-\theta_0)}}\right]}$ | $S\alpha = F^{-1}(\alpha)\sqrt{} + n\theta_0$ ②

$\boxed{\beta = 1 - F(\ )}$ ① $\Rightarrow$ $\boxed{\Pi = F\left[\frac{S\alpha - n\theta_1}{\sqrt{n\theta_1(1-\theta_1)}}\right]}$ ①

Courbes COR

$$\boxed{\Pi = F\left[F^{-1}(\alpha)\sqrt{\frac{\theta_0(1-\theta_0)}{\theta_1(1-\theta_1)}} + \frac{\sqrt{n}(\theta_0-\theta_1)}{\theta_1(1-\theta_1)}\right]}$$ ①

$\cancel{\theta_1 = a\theta_0}$

3) $\theta_1 < \theta_0 \Rightarrow \theta_0 - \theta_1 > 0$

Analyser le comportement de ces courbes en fonction de n

Ex1 1) changement de va bijectif de]0,1[dans]0,1[(0,5)

$J = \frac{1}{2\sqrt{y}}$ (0,5) — 2p5

$\pi(y) = \mathbb{1}_{]0,1[}(y)$ - C'est la loi uniforme sur [0,1] (1)

2) $F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x > 1 \\ x^2 & x \in [0,1] \end{cases}$ (1) — 2p5

$G(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ 1 & y > 1 \\ y & y \in [0,1] \end{cases}$ (1)

3) $\phi_Y(t) = \frac{e^{it} - 1}{it}$ qui est la fonction caractéristique d'une loi uniforme sur]0,1[(1) — 1pt

---

Ex2 1) $\begin{cases} Z = X+Y \\ T = X \end{cases} \iff \begin{cases} X = T \\ Y = Z - T \end{cases}$ chgt de va bijectifs (0,5)

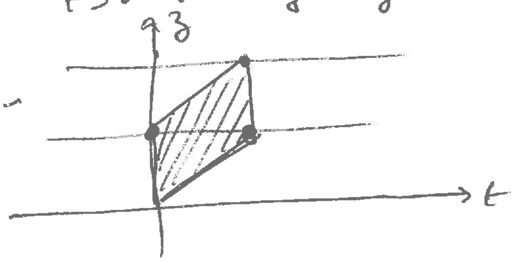
Jacobien $|\det(J)| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1$ (0,5)

(0,5) — 3p5

$\pi(z,t) = 1$

Domaine de Définition $t > 0 \quad t < 1 \quad z > t \quad z < t+1$ (0,5)

Représentation graphique (1)



2) $z \in [0,1]$ $\pi(z, \cdot) = z$ (1) — 2p5

$z \in [1,2]$ $\pi(z, \cdot) = 2 - z$ (1)

Ex3 1) $\hat{\theta}_{MV} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ (1) — 2pts

max global unique (1)

2) Sans biais (0,5)

$Var(\hat{\theta}_{MV}) = \frac{\theta(1-\theta)}{n}$ (1) — 2p5

$\hat{\theta}_{MV}$ convergent (0,5)

3) $BCR = \frac{\theta(1-\theta)}{n}$ — 1pt
