Examen Mardi 13 Novembre 2001

Exercice 1

1) La densité marginale de X est définie par

$$f(x,.) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy = \begin{cases} \int_{x}^{+\infty} f(x,y)\,dy \text{ si } x \geq 0 \\ \int_{-x}^{+\infty} f(x,y)\,dy \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$$

Par exemple pour $x \geq 0$, en posant $u = y - x$, on obtient

$$\begin{aligned} f(x,.) &= \int_{x}^{+\infty} \frac{1}{8}\left(y^2 - x^2\right) e^{-y} dy = \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{8}\left(u^2 + 2xu\right) e^{-(u+x)} du \\ &= \frac{1}{8} e^{-x} \left[\Gamma(3) + 2x\Gamma(2)\right] = \frac{1+x}{4} e^{-x} \end{aligned}$$

De même pour $x \leq 0$, en posant $u = y + x$, on obtient

$$f(x,.) = \frac{1-x}{4} e^{x}$$

c'est–à-dire

$$\boxed{f(x,.) = \frac{1+|x|}{4} e^{-|x|} \qquad x \in \mathbb{R}}$$

La densité marginale de Y notée $f(.,y)$ est définie par

$$f(.,y) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dx = \begin{cases} \int_{-y}^{+y} f(x,y)\,dx \text{ si } y \geq 0 \\ 0 \text{ si } y \leq 0 \end{cases}$$

Après quelques calculs élémentaires, on obtient :

$$\boxed{f(.,y) = \frac{1}{6} y^3 e^{-y} \mathbb{I}_{R^+}(y)}$$

avec $\mathbb{I}_{R^+}(y) = 0$ si $y < 0$ et $\mathbb{I}_{R^+}(y) = 1$ si $y \geq 0$. Les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes car $f(x,y) \neq f(x,.)f(.,y)$.

2) La covariance du couple (X,Y) est définie par

$$\operatorname{cov}(X,Y) = E[XY] - E[X]\,E[Y]$$

Puisque la densité marginale de X est paire, on a $E[X] = 0$. La moyenne de Y est $E[Y] = \frac{1}{6}\Gamma(5) = 4$. De plus

$$E[XY] = \int\int_{\mathbb{R}^2} xyf(x,y)dxdy = \int\int_{D} xyf(x,y)dxdy$$

On découpe l'intégrale en deux morceaux associés aux domaines $D_1 = \{(x, y) \mid x > 0 \text{ et } y \geq x\}$ et $D_2 = \{(x, y) \mid x < 0 \text{ et } y \geq -x\}$

$$E[XY] = \int\int_{D_1} xy\frac{1}{8}\left(y^2 - x^2\right) e^{-y} dxdy + \int\int_{D_2} xy\frac{1}{8}\left(y^2 - x^2\right) e^{-y} dxdy$$

Dans la seconde intégrale, on fait le changement de variables $u = -x$ et $v = y$ pour obtenir

$$\begin{aligned} \int\int_{D_2} xy\frac{1}{8}\left(y^2 - x^2\right) e^{-y} dxdy &= \int\int_{D_1} -uv\frac{1}{8}\left(v^2 - u^2\right) e^{-v} dudv \\ &= -\int\int_{D_1} xy\frac{1}{8}\left(y^2 - x^2\right) e^{-y} dxdy \end{aligned}$$

d'où:

$$\boxed{\operatorname{cov}(X, Y) = 0}$$

Cet exercice montre un exemple de couple de variables aléatoires non indépendantes et de covariance nulle.

3) On effectue un changement de variables standard :

$$\left\{ \begin{array}{l} S = X + Y \\ U = Y - X \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} X = \frac{1}{2}(S - U) \\ Y = \frac{1}{2}(S + U) \end{array} \right.$$

Le changement de variables est donc bijectif de D dans un domaine Δ défini par

$$\Delta = \left\{(s, u) \mid -y \leq x \leq y \text{ avec } x = \frac{1}{2}(s - u) \text{ et } y = \frac{1}{2}(s + u)\right\}$$

c'est-à-dire

$$\Delta = \left\{(s, u) \mid -\frac{1}{2}(s + u) \leq \frac{1}{2}(s - u) \leq \frac{1}{2}(s + u)\right\}$$

d'où

$$\boxed{\Delta = \left(\mathbb{R}^+\right)^2}$$

Le jacobien est

$$J = \left| \begin{array}{cc} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right| = \boxed{\frac{1}{2}}$$

La densité du couple (S, U) est donc :

$$g(s, u) = \frac{1}{8}\left\{\left[\frac{1}{2}(s + u)\right]^2 - \left[\frac{1}{2}(s - u)\right]^2\right\} e^{-\frac{1}{2}(s+u)} \times \frac{1}{2} \times \mathbb{I}_\Delta(s, u)$$

soit

$$\boxed{g(s, u) = \frac{1}{16} sue^{-\frac{1}{2}(s+u)}\mathbb{I}_\Delta(s, u)}$$

Les lois marginales se déduisent de $g(s, u)$ par intégration :

$$\boxed{g(s, .) = \frac{s}{4}e^{-\frac{s}{2}}\mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(s)}$$
$$\boxed{g(., u) = \frac{u}{4}e^{-\frac{u}{2}}\mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(u)}$$

Les variables aléatoires S et U sont donc indépendantes.

Exercice 2

1) Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont des variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\{1, ..., N\}$. De manière évidente

$$\boxed{P[X_1 = i] = \tfrac{1}{N} \qquad i \in \{1, ..., N\}}$$

Pour X_2, on a $\forall i \in \{1, ..., N\}$:

$$\begin{aligned} P[X_2 = i] &= \sum_{j \neq i} P[X_1 = j, X_2 = i] \\ &= \sum_{j \neq i} P[X_2 = i \mid X_1 = j] \, P[X_1 = i] \\ &= \sum_{j \neq i} \frac{1}{N-1} \frac{1}{N} = \boxed{\tfrac{1}{N}} \end{aligned}$$

Donc X_1 et X_2 sont des variables aléatoires de loi uniforme sur $\{1, ..., N\}$. Le couple (X_1, X_2) est un couple de variables aléatoires discrètes à valeurs dans $E = \{(i, j), i \in \{1, ..., N\}, j \in \{1, ..., N\}, i \neq j\}$. De plus, d'après ce qui précède :

$$P[X_1 = j, X_2 = i] = \frac{1}{N(N-1)} \qquad (i, j) \in E$$

La loi du couple (X_1, X_2) est donc la loi uniforme sur E.

2) La covariance du couple (X_1, X_2) est :

$$\operatorname{cov}(X_1, X_2) = E[X_1 X_2] - E[X_1] E[X_2]$$

avec $E[X_1] = E[X_2] = \sum_{i=1}^{N} i \frac{1}{N} = \boxed{\frac{N+1}{2}}$. De plus,

$$\begin{aligned} E[X_1 X_2] &= \sum_{j \neq i} ij \frac{1}{N(N-1)} \\ &= \frac{1}{N(N-1)} \left[\sum ij - \sum i^2 \right] \\ &= \frac{1}{N(N-1)} \left[\frac{N^2 (N+1)^2}{4} - \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} \right] \\ &= \boxed{\frac{(N+1)(3N+2)}{12}} \end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{\operatorname{cov}(X_1, X_2) = -\frac{N+1}{12}}$$

Exercice 3

1) On a

$$\begin{aligned} Z &= PY \Longleftrightarrow Y = P^{-1}Z = {}^tPZ \\ A &= {}^tP\Lambda P \Longleftrightarrow \Lambda = PA\,{}^tP \end{aligned}$$

donc

$$Q = {}^tYAY = {}^tZPA^tPZ = \boxed{{}^tZ\Lambda Z}$$

Puisque Λ est une matrice diagonale, on a bien le résultat demandé :

$$\boxed{Q = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k Z_k^2}$$

2) Puisque P est une matrice orthogonale, elle est inversible et donc de rang maximal n. D'après le cours, on sait que Z est un vecteur Gaussien. De plus, en notant Γ_Z et $\Gamma_Y = I_n$ les matrices de covariance des vecteurs Z et Y, on a :

$$\begin{aligned} E[Z] &= PE[Y] = 0 \\ \Gamma_Z &= E\left[Z\,{}^tZ\right] = P\Gamma_Y\,{}^tP = P^tP = I_n \end{aligned}$$

En conséquence

$$\boxed{Z \sim \mathcal{N}_n(0, I_n)}$$

Puisque les covariances entre les variables Z_i et Z_k (avec $i \neq k$) sont toutes nulles et **que le vecteur Z est Gaussien**, d'après un résultat du cours, **les variables Z_k sont indépendantes.**

3) Puisque $Z_k \sim \mathcal{N}(0,1)$, $T_k = Z_k^2$ suit une loi du chi deux à 1 degré de liberté (i.e. $T_k \sim \chi_2^1$). On en déduit, à l'aide de la table, sa fonction caractéristique :

$$\Phi_{T_k}(u) = E\left[e^{iT_k u}\right] = \boxed{\frac{1}{\sqrt{1-2iu}}}$$

Puisque les variables aléatoires T_k sont indépendantes, on a :

$$\Phi_Q(u) = E\left[e^{iQu}\right] = E\left[e^{i\sum_{k=1}^{n}\lambda_k T_k u}\right] = E\left[\prod_{k=1}^{n} e^{i\lambda_k T_k u}\right] = \prod_{k=1}^{n} E\left[e^{i\lambda_k T_k u}\right]$$

c'est-à-dire

$$\Phi_Q(u) = \prod_{k=1}^{n} \Phi_{T_k}(\lambda_k u) = \boxed{\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1-2iu\lambda_k}}}$$

4) Si λ est une valeur propre de $A = A^2$, on a

$$Ax = \lambda x \text{ avec } x \neq 0$$

donc

$$A^2x = \lambda Ax \Rightarrow Ax = \lambda Ax \Rightarrow \lambda x = \lambda^2 x$$

Donc

$$\lambda(1-\lambda)x = 0$$

Puisque $x \neq 0$, on en déduit $\boxed{\lambda = 0 \text{ ou } \lambda = 1}$. Revenons à l'expression

$$\Phi_Q(u) = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1 - 2iu\lambda_k}}$$

On a

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2iu\lambda_k}} = \begin{cases} 1 \text{ si } \lambda_k = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{1-2iu}} \text{ si } \lambda_k = 1 \end{cases}$$

Donc

$$\Phi_Q(u) = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - 2iu}}\right)^K = \frac{1}{(1 - 2iu)^{K/2}}$$

où K est l'ordre de multiplicité de la valeur propre $\lambda = 1$. A l'aide de la table, on voit que $\frac{1}{(1-2iu)^{K/2}}$ est la fonction caractéristique d'une loi du chi deux à K degrés de libertés, i. e.

$$\boxed{Q \sim \chi_2^K}$$