Examen Jeudi 18 Novembre 2004

Exercice 1

1) Le changement de variables permettant de passer de (X,Y) à (ρ,θ) est bijectif de $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ dans $\mathbb{R}^{+*}\times[0,2\pi[$ avec

$$\left\{\begin{array}{l} X=\rho\cos\theta \\ Y=\rho\sin\theta \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} \rho=\sqrt{X^2+Y^2} \\ \theta=\arctan\left(\frac{Y}{X}\right)+k\pi \end{array}\right.$$

Le Jacobien de la transformation est

$$J=\left|\begin{array}{cc} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{array}\right|=\rho$$

d'où la densité du couple (ρ,θ)

$$f(\rho,\theta)=\frac{\rho}{2\pi}\exp\left(-\frac{\rho^2}{2}\right)I_{\mathbb{R}^{+*}\times[0,2\pi[}(\rho,\theta)$$

2) On a facilement $U=\rho\cos(2\theta)$ et $V=\frac{\rho}{2}\sin(2\theta)$, donc

$$\rho=\sqrt{U^2+4V^2}$$

Lorsque θ parcourt l'intervalle $[0,\pi[$, $2\theta\in[0,2\pi[$ et donc $(U,2V)$ parcourt $\mathbb{R}^2$. On a donc une première bijection de $\mathbb{R}^{+*}\times[0,\pi[$ dans $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. Lorsque θ parcourt l'intervalle $[\pi,2\pi[$, $2\theta\in[2\pi,4\pi[$ et donc $(U,2V)$ parcourt aussi $\mathbb{R}^2$. On a donc une seconde bijection de $\mathbb{R}^{+*}\times[\pi,2\pi[$ dans $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. Pour chacune de ces deux bijections, on a

$$\theta=\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{2V}{U}\right)+k\frac{\pi}{2}$$

Le Jacobien d'une de ces bijections s'écrit donc

$$\begin{aligned} J &= \left|\begin{array}{cc} \frac{\partial\rho}{\partial U} & \frac{\partial\theta}{\partial U} \\ \frac{\partial\rho}{\partial V} & \frac{\partial\theta}{\partial V} \end{array}\right| \\ &= \left|\begin{array}{cc} \frac{U}{\sqrt{U^2+4V^2}} & \frac{-V}{U^2}\frac{U^2}{U^2+4V^2} \\ \frac{4V}{\sqrt{U^2+4V^2}} & \frac{1}{U}\frac{U^2}{U^2+4V^2} \end{array}\right| = \frac{1}{\sqrt{U^2+4V^2}} \end{aligned}$$

La densité du couple (U,V) est donc définie par

$$h(u,v)=h_1(u,v)+h_2(u,v)$$

où h_1 et h_2 sont les densités correspondant à chaque bijection, c'est-à-dire

$$h_1(u,v) = h_2(u,v) = \frac{\sqrt{u^2+4v^2}}{2\pi} \exp\left(-\frac{u^2+4v^2}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{u^2+4v^2}} I_{\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}}(u,v)$$

Finalement, on obtient

$$h(u,v) = \frac{1}{\pi} \exp\left(-\frac{u^2+4v^2}{2}\right) I_{\mathbb{R}^2}(u,v)$$

3) Les lois marginales de U et de V s'obtiennent par intégration de $h(u,v)$:

$$\begin{aligned} h(u,.) &= \int h(u,v)du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) \\ h(.,v) &= \int h(u,v)dv = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp\left(-2v^2\right) \end{aligned}$$

soit

$$U \sim \mathcal{N}(0,1) \text{ et } V \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{4}\right)$$

On en déduit alors

$$\begin{aligned} E\left[U\right] &= E\left[V\right] = 0 \\ Var\left[U\right] &= 1, Var\left[V\right] = \frac{1}{4} \\ E\left[e^{itU}\right] &= \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right), E\left[e^{itV}\right] = \exp\left(-\frac{t^2}{8}\right) \end{aligned}$$

Puisque $h(u,v) = h(u,.)h(.,v)$ pour tout couple (u,v), les variables aléatoires U et V sont indépendantes.

3) Cet exercice montre que les couples (X,Y) et (U,V) liés par une transformation non linéaires sont simultanément Gaussiens. L'affirmation proposée est donc fausse.

Exercice 2 :

On considère un vecteur Gaussien $U = (X,Y,Z)^T$ de vecteur moyenne $m = (1,0,0)^T$ et de matrice de covariance

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Répondre aux questions suivantes en prenant soin de justifier correctement vos réponses.
1) Les lois marginales d'un vecteur Gaussien sont des lois Gaussiennes. En découpant le vecteur moyenne et la matrice de covariance par blocs, on obtient facilement :

$$\begin{pmatrix} X \\ Z \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) \text{ et } Y \sim \mathcal{N}(0,2)$$

2) Comme à la question précédente, on obtient

$$\begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

Puisque $(Y,Z)^T$ est un vecteur Gaussien et que $cov(Y,Z) = 0$, on en déduit que les variables aléatoires Y et Z sont indépendantes.
3) On a

$$\begin{pmatrix} W \\ S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

Puisque le rang de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

est $\text{rang}(M) = 2$, le vecteur $(W,S)^T$ est Gaussien. Plus précisément

$$(W,S)^T \sim \mathcal{N}\left(Mm, M\Sigma M^T\right)$$

Après calculs, on obtient

$$(W,S)^T \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}\right)$$

4) Puisque $(W,S)^T$ est un vecteur Gaussien et que $cov\,(W,S) = 4 \neq 0$, les variables aléatoires W et S ne sont pas indépendantes.

Exercice 3

1) Pour $n = 1$, il y a 2 couloirs.

- La bille se retrouve dans le couloir C_0 si elle a obliqué 1 fois à gauche et 0 fois à droite.
- Elle se retrouve dans le couloir de droite C_1 si elle a obliqué 0 fois à gauche et 1 fois à droite.

Pour $n = 2$, il y a 3 couloirs.

- La bille se retrouve dans le couloir C_0 si elle a obliqué 2 fois à gauche et 0 fois à droite.
- Elle se retrouve dans le couloir du milieu C_1 si elle a obliqué 1 fois à gauche et 1 fois à droite.
- Elle se retouve dans le couloir de droite C_2 si elle a obliqué 0 fois à gauche et 2 fois à droite.

Pour $n = 3$, il y a 4 couloirs.

- La bille se retrouve dans le couloir C_0 si elle a obliqué 3 fois à gauche et 0 fois à droite.
- Elle se retrouve dans le couloir C_1 si elle a obliqué 2 fois à gauche et 1 fois à droite.
- Elle se retouve dans le couloir C_2 si elle a obliqué 1 fois à gauche et 2 fois à droite.
- Elle se retouve dans le couloir de droite C_3 si elle a obliqué 0 fois à gauche et 3 fois à droite.

De manière générale, il y a $n+1$ couloirs et la bille se retrouve dans le couloir C_k si elle a obliqué $N_g = n-k$ fois à gauche et $N_d = k$ fois à droite.
2) On a

$$\begin{aligned} p_k &= P\left[k \text{ fois à droite et } n-k \text{ fois à gauche}\right] \\ &= C_n^k \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

En effet, il y C_n^k façons d'aller k fois à droite et $n-k$ fois à gauche et la probabilité de chaque chemin est $\left(\frac{1}{2}\right)^n$.
3) On est dans un shéma de loi binomiale où chaque boule a la probabilité p_k d'arriver dans C_k (succès) et la probabilité $q_k = 1 - p_k$ de ne pas arriver dans C_k. N_k suit donc une loi Binomiale

$$N_k \sim B(L, p_k)$$

d'où

$$E[N_k] = Lp_k \text{ et } Var[N_k] = Lp_k q_k$$

4) N_k est la somme de L variables aléatoire $X_1, ..., X_L$ telles que

$$\begin{aligned} X_j &= 1 \text{ si la } j^{ième} \text{ boule tombe dans } C_k \\ X_j &= 0 \text{ sinon} \end{aligned}$$

Puisque les variables aléatoires X_i sont indépendantes (une boule n'influe pas sur les autres), le théorème de la limite centrale s'applique, d'où

$$\frac{N_k - Lp_k}{\sqrt{Lp_k q_k}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

Pour L grand, on peut donc approcher la loi de N_k par une loi normale $\mathcal{N}(Lp_k, Lp_k q_k)$.
5) D'après la quesion précédente, on a

$$\begin{aligned} P[N_k = i] &= P\left[i - \frac{1}{2} < N_k < i + \frac{1}{2}\right] \\ &= P\left[\frac{i - 1/2 - Lp_k}{\sqrt{Lp_k q_k}} < \frac{N_k - Lp_k}{\sqrt{Lp_k q_k}} < \frac{i + 1/2 - Lp_k}{\sqrt{Lp_k q_k}}\right] \\ &= \int_{z(i) - \frac{1}{2\sqrt{Lp_k q_k}}}^{z(i) + \frac{1}{2\sqrt{Lp_k q_k}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du \end{aligned}$$

avec

$$z(i) = \frac{i - Lp_k}{\sqrt{Lp_k q_k}}.$$

Pour L grand, on peut supposer que la fonction $f(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}$ ne varie pas trop sur l'intervalle

$$\left[z(i) - \frac{1}{2\sqrt{Lp_k q_k}}, z(i) + \frac{1}{2\sqrt{Lp_k q_k}}\right].$$

On a alors

$$
\begin{aligned}
P\left[N_k = i\right] &\simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2} z^2(i)\right] \int_{z(i)-\frac{1}{2\sqrt{Lp_k q_k}}}^{z(i)+\frac{1}{2\sqrt{Lp_k q_k}}} du \\
&\simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{i - Lp_k}{\sqrt{Lp_k q_k}}\right)^2\right] \frac{1}{\sqrt{Lp_k q_k}}
\end{aligned}
$$

On peut donc approcher $P\left[N_k = i\right]$ comme suit

$$
P\left[N_k = i\right] \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(i - m)^2}{2\sigma^2}\right]
$$

avec

$$
m = Lp_k \text{ et } \sigma^2 = Lp_k q_k
$$

La forme de la courbe dessinée par les billes dans le triangle de Galton est donc une Gaussienne.