Examen Mercredi 16 Novembre 2005

$\boxed{\textbf{Exercice 1}}$

1) La constante k est telle que

$$\iint f(x,y)\,dxdy = 1.$$

On a donc

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k} &= \int\int_D e^{-\theta x}dxdy \\
&= \int_0^\infty \left[\int_0^x e^{-\theta x}dy\right]dx \\
&= \int_0^\infty xe^{-\theta x}dx \\
&\underbrace{=}_{u=-\theta x} \int_0^\infty -\frac{u}{\theta}e^{-u}\frac{du}{-\theta} \\
&= \frac{1}{\theta^2}\Gamma(2) = \frac{1}{\theta^2}
\end{aligned}$$

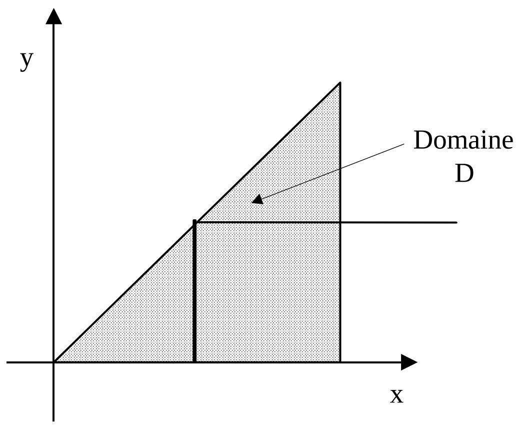
d'où

$$\boxed{k = \theta^2}$$

2) La loi marginale de X est définie par

$$f(x,.) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)dy$$

D'après la forme du domaine D représenté ci-dessous :



on voit que $f(x,.) = 0$ si $x < 0$ et que

$$f(x,.) = \int_0^x \theta^2 e^{-\theta x} dy, \qquad x > 0$$

c'est-à-dire

$$f(x,.) = \theta^2 x e^{-\theta x} I_{\mathbb{R}^+}(x)$$

pour $I_{\mathbb{R}^+}(x)$ est la fonction indicatrice sur $\mathbb{R}^+$. On reconnaît

$$\boxed{X \sim \Gamma(\theta, 2)}$$

De même

$$\begin{aligned} f(.,y) &= \int_y^\infty \theta^2 e^{-\theta x} dx, \qquad y > 0 \\ &= -\theta \left[e^{-\theta x}\right]_y^\infty, \qquad y > 0 \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$f(.,y) = \theta e^{-\theta y} I_{\mathbb{R}^+}(y)$$

On reconnaît

$$\boxed{X \sim \Gamma(\theta, 1)}$$

3) On effectue le changement de variables

$$\left\{ \begin{array}{c} T = X \\ Z = Y/X \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} X = T \\ Y = ZT \end{array} \right.$$

Le changement de variables est donc bijectif de D dans un domaine Δ défini par

$$0 < y < x \Leftrightarrow 0 < ZT < T \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} T > 0 \\ Z \in]0,1[\end{array} \right.$$

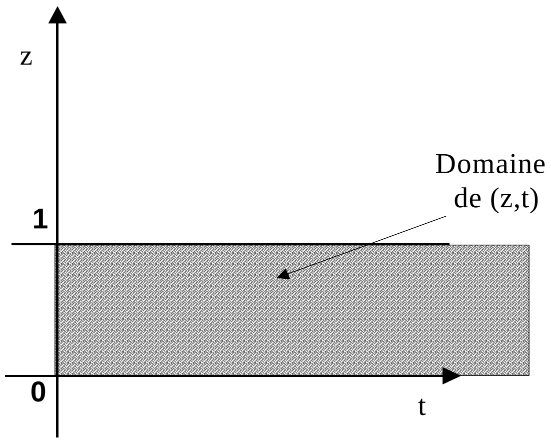
Le jacobien de ce changement de variables est

$$J = \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial X}{\partial Z} & \frac{\partial Y}{\partial Z} \\ \frac{\partial X}{\partial T} & \frac{\partial Y}{\partial T} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} 0 & T \\ 1 & Z \end{array} \right| = -T$$

On en déduit la densité du couple (Z,T) :

$$f(z,t) = \theta^2 e^{-\theta t} |-t| = \left\{ \begin{array}{ll} \theta^2 t e^{-\theta t} \text{ si } t > 0 \text{ et } z \in]0,1[\\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right.$$

On voit sur le dessin suivant



que la loi marginale de Z est définie sur $]0,1[$ et que

$$\begin{aligned} f(z,.) &= \int_0^\infty \theta^2 t e^{-\theta t} dt \\ &\underbrace{=}_{u=-\theta t} \int_0^\infty -u\theta e^{-u} \frac{du}{-\theta} \\ &= \Gamma(2) = 1 \end{aligned}$$

La variable Z possède donc la loi uniforme sur $]0,1[$. On a vu précédemment que la loi de T est

$$f(.,t) = \theta^2 t e^{-\theta t} I_{\mathbb{R}^+}(t)$$

Puisque $f(z,t) = f(z,.)f(.,t)$, les deux variables Z et T sont indépendantes.

Exercice 2

1) Le couple (X_i, X_{i+1}) prend ses valeurs dans l'ensemble $\{(0,0),(1,0),(0,1),(1,1)\}$. Les probabilités associées sont

$$\begin{aligned} P[X_i = 0, X_{i+1} = 0] &= P[X_{i+1} = 0 \,|X_i = 0]\, P[X_i = 0] = (1-\alpha)\, q \\ P[X_i = 1, X_{i+1} = 0] &= P[X_{i+1} = 0 \,|X_i = 1]\, P[X_i = 1] = p \\ P[X_i = 0, X_{i+1} = 1] &= P[X_{i+1} = 1 \,|X_i = 0]\, P[X_i = 0] = \alpha q \\ P[X_i = 1, X_{i+1} = 1] &= P[X_{i+1} = 1 \,|X_i = 1]\, P[X_i = 1] = 0 \end{aligned}$$

2) La loi de X_{i+1} est définie par

$$\begin{aligned} P[X_{i+1} = 0] &= p + (1-\alpha)\, q = 1 - \alpha q \\ P[X_{i+1} = 1] &= \alpha q \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} E[X_{i+1}] &= \alpha q \\ \mathrm{Var}[X_{i+1}] &= E\left[X_{i+1}^2\right] - E[X_{i+1}]^2 = \alpha q - (\alpha q)^2 = \alpha q\,(1-\alpha q) \end{aligned}$$

La covariance du couple (X_i, X_{i+1}) est définie par

$$\text{cov}\,(X_i, X_{i+1}) = E\,[X_i X_{i+1}] - E\,[X_i]\,E\,[X_{i+1}]$$

Or

$$E\,[X_i X_{i+1}] = (0 \times (1-\alpha)\,q) + (0 \times p) + (0 \times \alpha q) + (1 \times 0) = 0$$

D'où

$$\text{cov}\,(X_i, X_{i+1}) = -\alpha p q$$

3) On effectue le changement de variables $Y_i = X_{i+1} - X_i$ et $Z_i = X_{i+1} + X_i$. De manière évidente, on a

	Y_i	Z_i
$X_i = 1, X_{i+1} = 1$	0	2
$X_i = 1, X_{i+1} = 0$	-1	1
$X_i = 0, X_{i+1} = 1$	1	1
$X_i = 0, X_{i+1} = 0$	0	0

On en déduit

$$\begin{array}{rcl} P\,[(Y_i, Z_i) = (0,2)] & = & P\,[X_i = 1, X_{i+1} = 1] = 0 \\ P\,[(Y_i, Z_i) = (-1,1)] & = & P\,[X_i = 1, X_{i+1} = 0] = p \\ P\,[(Y_i, Z_i) = (1,1)] & = & P\,[X_i = 0, X_{i+1} = 1] = \alpha q \\ P\,[(Y_i, Z_i) = (0,0)] & = & P\,[X_i = 0, X_{i+1} = 0] = (1-\alpha)\,q \end{array}$$

Les lois marginales de Y_i et de Z_i s'en déduisent alors facilement

$$\left\{ \begin{array}{c} P\,[Y_i = 0] = (1-\alpha)\,q \\ P\,[Y_i = 1] = \alpha q \\ P\,[Y_i = -1] = p \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{c} P\,[Z_i = 0] = (1-\alpha)\,q \\ P\,[Z_i = 1] = p + \alpha q \end{array} \right.$$

4) Les lois conditionnelles de $T_i\,|Y_i = 0\,$, $T_i\,|Y_i = -1$ et de $T_i\,|Y_i = 1\,$.sont définies par

$$\begin{array}{rcl} T_i\,|Y_i = 0 & \sim & \mathcal{N}(0, \sigma^2) \\ T_i\,|Y_i = -1 & \sim & \mathcal{N}(-1, \sigma^2) \\ T_i\,|Y_i = 1 & \sim & \mathcal{N}(1, \sigma^2) \end{array}$$

D'après le théorème des probabilités totales, on en déduit

$$\begin{array}{rcl} P\,[T_i < t] & = & P\,[T_i < t\,|Y_i = 0]\,P\,[Y_i = 0] + P\,[T_i < t\,|Y_i = -1]\,P\,[Y_i = -1] + \\ & & P\,[T_i < t\,|Y_i = 0]\,P\,[Y_i = 1]\,P\,[Y_i = 1] \end{array}$$

c'est-à-dire après dérivation

$$f\,(t_i) = \frac{(1-\alpha)\,q}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{t_i^2}{2\sigma^2}\right] + \frac{p}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(t_i+1)^2}{2\sigma^2}\right] + \frac{\alpha q}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(t_i-1)^2}{2\sigma^2}\right]$$

Le couple (X_i, X_{i+1}) a une probabilité nulle d'être égal à $(0,0)$. De plus, si la variance σ^2 est faible,

- lorsque $(X_i, X_{i+1}) = (1,0)$, on a $T_i = -1 + W$ qui est proche de -1
- lorsque $(X_i, X_{i+1}) = (0,1)$, on a $T_i = 1 + W$ qui est proche de 1
- lorsque $(X_i, X_{i+1}) = (0,0)$, on a $T_i = W$ qui est proche de 0

Une stratégie possible est donc la suivante

$$\begin{array}{rcl} \text{si } T_i & < & -\frac{1}{2} \text{ alors } (X_i, X_{i+1}) = (1,0) \\ \text{si } T_i & > & \frac{1}{2} \text{ alors } (X_i, X_{i+1}) = (0,1) \\ \text{si } -\frac{1}{2} & < & T_i < \frac{1}{2} \text{ alors } (X_i, X_{i+1}) = (0,0) \end{array}$$

Exercice 3

1) La variance de X_i est le $i^{ème}$ élément de la diagonale de Σ, donc

$$\text{var}\left[X_i\right] = \sigma_x^2.$$

De même, la covariance du couple (X_i, X_j) s'obtient à partir de l'élément de la $i^{ème}$ ligne et la $j^{ème}$ colonne de Σ, soit

$$\text{cov}\left[X_i, X_j\right] = 0, \text{ si } i \neq j.$$

2) Puisque U est une variable aléatoire indépendante de X, la densité de (X, U) s'écrit

$$f(x, u) = f(x, .) f(., u)$$

où $f(x, .)$ est la densité de la loi normale à n dimensions de moyenne $m = (0, ..., 0)$ et de matrice de covariance $\Sigma = \sigma_x^2 I_n$, c'est-à-dire

$$f(x, .) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{x_i^2}{2\sigma_x^2}\right]$$

et où $f(., u)$ la densité d'une loi normale à 1 dimension de moyenne 0 et de variance σ_U^2

$$f(., u) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_U \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{u^2}{2\sigma_U^2}\right]$$

On en déduit que (X, U) est un vecteur Gaussien de moyenne nulle et de matrice de covariance

$$\begin{pmatrix} \sigma_x^2 I_n & 0 \\ 0 & \sigma_U^2 \end{pmatrix}$$

Le vecteur V est lié à (X, U) par une transformation affine

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} {}^t H & a \\ -({}^t H) & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ U \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} h_1 & ... & h_n & a \\ -h_1 & ... & -h_n & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ U \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La matrice

$$M = \begin{pmatrix} h_1 & \dots & h_n & a \\ -h_1 & \dots & -h_n & a \end{pmatrix}$$

est de rang 2 car h est un vecteur non nul et $a \neq 0$ (les deux lignes ne peuvent pas être proportionnelles). Donc on sait que (Y, Z) suit un vecteur Gaussien de moyenne

$$M \begin{pmatrix} E[X] \\ E[U] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et de matrice de covariance

$$\Gamma = M \begin{pmatrix} \sigma_x^2 I_n & 0 \\ 0 & \sigma_U^2 \end{pmatrix} {}^t M$$

Des calculs de matrice élémentaires permettent d'obtenir

$$\Gamma = \begin{pmatrix} a^2\sigma_U^2 + \sigma_x^2 \sum_{i=1}^n h_i^2 & a^2\sigma_U^2 - \sigma_x^2 \sum_{i=1}^n h_i^2 \\ a^2\sigma_U^2 - \sigma_x^2 \sum_{i=1}^n h_i^2 & a^2\sigma_U^2 + \sigma_x^2 \sum_{i=1}^n h_i^2 \end{pmatrix}$$

Pour $a = 0$, la matrice M est de rang 1 et donc on ne peut appliquer les résultats concernant les transformations affines de vecteurs Gaussiens. Ceci se traduit par une matrice Γ qui s'écrit

$$\Gamma = \sigma_x^2 \sum_{i=1}^n h_i^2 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

et qui est donc de rang 1. Le vecteur $(Y = ({}^t H)\, X, Z = -Y)$ n'admet pas de densité.
3) On se place dans le cas $a = 0$. On a alors

$$\begin{aligned} Y &= \left({}^t H\right) X \\ Z &= -\left({}^t H\right) X = -Y \end{aligned}$$

La variable aléatoire $Y = ({}^t H)\, X$ suit une loi normale de moyenne nulle et de variance

$$\operatorname{var}[Y] = \left({}^t H\right) \left(\sigma_x^2 I_n\right) H = \sigma_x^2 \sum_{i=1}^n h_i^2$$

Donc

$$T = \frac{Y}{\sqrt{\sigma_x^2 \sum_{i=1}^n h_i^2}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

La variable aléatoire W est définie par

$$W = YZ = -Y^2 = -\left(\sigma_x^2 \sum_{i=1}^n h_i^2\right) T^2$$

Il suffit donc de faire un changement de variable faisant passer de T à W. Ce changement de variables n'est pas bijectif. On a deux bijections :

- une première bijection de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^-$ définie par $W = -\alpha T^2$ avec $T = \sqrt{\frac{-W}{\alpha}}$ et $\alpha = \sigma_x^2 \sum_{i=1}^n h_i^2$. La densité associée s'écrit

$$\begin{aligned} g_1(w) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{w}{2\alpha}\right) \left| \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \frac{1}{2\sqrt{-w}} \right|, \qquad w < 0 \\ &= \frac{1}{2\sqrt{-2\pi\alpha w}} \exp\left(\frac{w}{2\alpha}\right), \qquad w < 0 \end{aligned}$$

- une seconde bijection de $\mathbb{R}^-$ dans $\mathbb{R}^-$ définie par $W = -\alpha T^2$ avec $T = -\sqrt{\frac{-W}{\alpha}}$ et $\alpha = \sigma_x^2 \sum_{i=1}^n h_i^2$. La densité associée s'écrit

$$\begin{aligned} g_2(w) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{w}{2\alpha}\right) \left| \frac{-1}{\sqrt{\alpha}} \frac{1}{2\sqrt{-w}} \right|, \qquad w < 0 \\ &= \frac{1}{2\sqrt{-2\pi\alpha w}} \exp\left(\frac{w}{2\alpha}\right), \qquad w < 0 \end{aligned}$$

La densité de W s'écrit alors

$$g(w) = \frac{1}{\sqrt{-2\pi\alpha w}} \exp\left(\frac{w}{2\alpha}\right), \qquad w < 0$$

c'est-à-dire

$$g(w) = \frac{1}{\sqrt{-2\pi\alpha w}} \exp\left(\frac{w}{2\alpha}\right) I_{\mathbb{R}^-}(w)$$

4) Lorsque $a \neq 0$, le problème est plus compliqué. Il faut calculer la loi d'un couple (W, A) où A est une variable auxiliaire (par exemple $A = X$), puis intégrer la densité à 2 dimensions obtenue pour avoir la loi marginale de W.