Examen Mercredi 8 Novembre 2006

Exercice 1

1) Puisque les variables aléatoires X et Y sont indépendantes, on a

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(x,.)\,f(.,y) \\ &= I_{[0,1]}(x)I_{[0,1]}(y) \end{aligned}$$

où $I_{[0,1]}(x)$ est la fonction indicatrice sur l'intervalle $[0,1]$. Le couple (X,Y) est donc défini sur le pavé $[0,1]\times[0,1]$. Le changement de variables $U=X+Y$ et $V=X$ est bijectif puisque

$$\left\{ \begin{array}{c} U=X+Y \\ V=X \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} Y=U-V \\ X=V \end{array} \right.$$

Le jacobien de ce changement de variables est

$$J = \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial X}{\partial U} & \frac{\partial Y}{\partial U} \\ \frac{\partial X}{\partial V} & \frac{\partial Y}{\partial V} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{array} \right| = -1$$

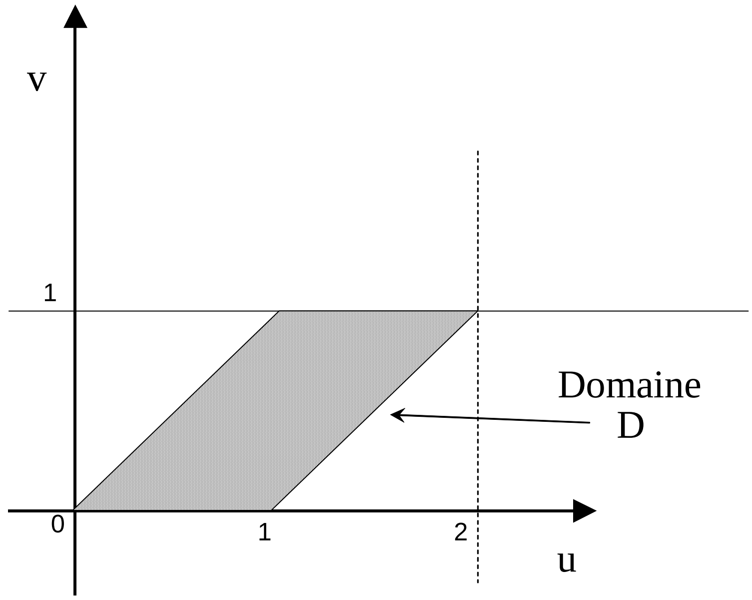
On en déduit la densité du couple (U,V) :

$$g(u,v) = \left\{ \begin{array}{cc} 1 \text{ si } (U,V)\in\Delta \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right.$$

Le domaine Δ se détermine comme suit

$$\left\{ \begin{array}{c} 0<x<1 \\ 0<y<1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 0<v<1 \\ 0<u-v<1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 0<v<1 \\ u>v \text{ et } u<v+1 \end{array} \right.$$

et est représenté sur la figure ci-dessous



2) Puisque $V = X$, on a sans calcul

$$f(.,v) = I_{[0,1]}(v)$$

Pour avoir la loi de U, il suffit d'intégrer la densité du couple par rapport à v

$$f(u,.) = \int_{\mathbb{R}} f(u,v)dv$$

D'après le domaine représenté ci-dessus, on voit que

$$\begin{aligned} f(u,.) &= \begin{cases} \int_0^u f(u,v)dv \text{ si } u \in [0,1] \\ \int_{u-1}^1 f(u,v)dv \text{ si } u \in [1,2] \end{cases} \\ &= \begin{cases} \int_0^u 1dv \text{ si } u \in [0,1] \\ \int_{u-1}^1 1dv \text{ si } u \in [1,2] \end{cases} \\ &= \begin{cases} u \text{ si } u \in [0,1] \\ 2-u \text{ si } u \in [1,2] \end{cases} \end{aligned}$$

On vérifie

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f(u,.)du &= \int_0^1 udu + \int_1^2 (2-u)du \\ &= \frac{1}{2} + \left[2u - \frac{u^2}{2}\right]_1^2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

3) Puisque $V = X$, on a

$$\text{var}V = \text{var}X = \sigma_X^2$$

Puisque X et Y ont la même loi, on a $E[X] = E[Y]$ et $E[X^2] = E[Y^2]$. Mais comme $U = X + Y$, on a

$$\begin{aligned} E[U] &= E[X] + E[Y] = 2E[X] \\ E\left[U^2\right] &= E\left[X^2\right] + E\left[Y^2\right] + 2E[XY] \\ &= 2E\left[X^2\right] + 2E[X]E[Y] \\ &= 2E\left[X^2\right] + 2E[X]^2 \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \mathrm{var}U &= E\left[U^2\right] - E[U]^2 \\ &= 2E\left[X^2\right] + 2E[X]^2 - (2E[X])^2 \\ &= 2\mathrm{var}X = 2\sigma_X^2 \end{aligned}$$

La covariance du couple (U, V) s'écrit

$$\begin{aligned} \mathrm{cov}(U,V) &= E[UV] - E[U]E[V] \\ &= E[(X+Y)X] - (2E[X])E[X] \\ &= E\left[X^2\right] + E[X]E[Y] - 2E[X]^2 \\ &= \mathrm{var}X = \sigma_X^2 \end{aligned}$$

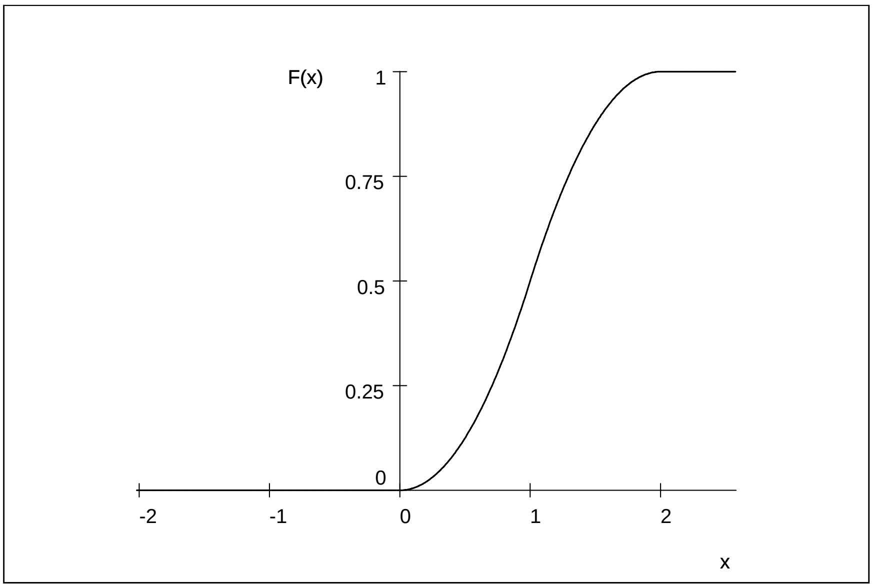
Le coefficient de corrélation du couple (U, V) s'en déduit simplement

$$\rho_{U,V} = \frac{\mathrm{cov}(U,V)}{\sqrt{\mathrm{var}U\,\mathrm{var}V}} = \frac{\sigma_X^2}{\sqrt{\left(2\sigma_X^2\right)\sigma_X^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

4) La fonction de répartition de U est définie par

$$\begin{aligned} F(x) &= P[U < x] = \int_{-\infty}^{x} f(u,.)du \\ &= \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ \int_0^x udu \text{ si } x \in [0,1] \\ \int_0^1 udu + \int_1^x (2-u)du \text{ si } x \in [1,2] \\ 1 \text{ si } x > 2 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ \frac{1}{2}x^2 \text{ si } x \in [0,1] \\ \frac{1}{2} + \left[2u - \frac{1}{2}u^2\right]_1^x \text{ si } x \in [1,2] \\ 1 \text{ si } x > 2 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ \frac{1}{2}x^2 \text{ si } x \in [0,1] \\ \frac{1}{2} + \left(2x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}\right) \text{ si } x \in [1,2] \\ 1 \text{ si } x > 2 \end{cases} \\ &\quad \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ \frac{1}{2}x^2 \text{ si } x \in [0,1] \\ 2x - \frac{1}{2}x^2 - 1 \text{ si } x \in [1,2] \\ 1 \text{ si } x > 2 \end{cases} \end{aligned}$$

La fonction de répartition $F(x)$ est représentée ci-dessous



Exercice 2

La loi du couple (X, Y) est définie par

$$\begin{aligned} P[X=0,Y=0] &= P[X=0]\,P[Y=0] = \frac{1}{4} \\ P[X=1,Y=0] &= P[X=1]\,P[Y=0] = \frac{1}{4} \\ P[X=0,Y=1] &= P[X=0]\,P[Y=1] = \frac{1}{4} \\ P[X=1,Y=1] &= P[X=1]\,P[Y=1] = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

En d'autres termes, la loi du couple (X, Y) est uniforme sur

$$\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$$

1) Comme dans l'exercice précédent, on a

$$\left\{ \begin{array}{c} U = X + Y \\ V = X \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{c} Y = U - V \\ X = V \end{array} \right.$$

Donc,

$$\begin{aligned} X &= 0, Y = 0 \Rightarrow U = 0, V = 0 \\ X &= 0, Y = 1 \Rightarrow U = 1, V = 0 \\ X &= 1, Y = 0 \Rightarrow U = 1, V = 1 \\ X &= 1, Y = 1 \Rightarrow U = 2, V = 1 \end{aligned}$$

Le couple (U, V) suit donc une loi uniforme sur l'ensemble

$$\{(0,0),(1,0),(1,1),(2,1)\}$$

2) Les lois marginales de U et de V sont définies comme suit

$$\begin{aligned}
P[U=0] &= P[(U,V)=(0,0)] = \frac{1}{4} \\
P[U=1] &= P[(U,V)=(1,0)] + P[(U,V)=(1,1)] = \frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2} \\
P[U=2] &= P[(U,V)=(2,1)] = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
P[V=0] &= P[(U,V)=(0,0)] + P[(U,V)=(1,0)] = \frac{1}{2} \\
P[V=1] &= P[(U,V)=(1,1)] + P[(U,V)=(2,1)] = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

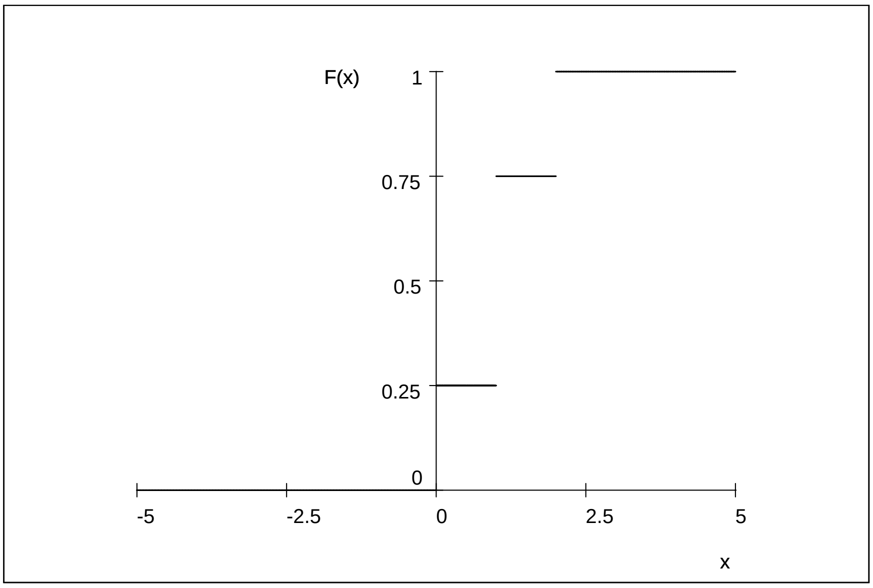
3) Les calculs effectués dans l'exercice 1 sont applicables ici car les variables X et Y sont toujours indépendantes. On en déduit que le coefficient de corrélation du couple (U,V) s'écrit

$$\rho_{U,V} = \frac{\operatorname{cov}(U,V)}{\sqrt{\operatorname{var}U \operatorname{var}V}} = \frac{\sigma_X^2}{\sqrt{(2\sigma_X^2)\,\sigma_X^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

4) La fonction de répartition de U s'écrit

$$P[U<x] = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0 \\ \frac{1}{4} \text{ si } x \in \left]0,1\right] \\ \frac{3}{4} \text{ si } x \in \left]1,2\right] \\ 1 \text{ si } x > 2 \end{cases}$$

et est représentée ci-dessous



Exercice 3

1) Le couple (U,V) est lié à $X = {}^t(X_1, X_2, X_3)$ par la transformation

$$\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$$

Donc, d'après les résultats du cours, on a

$$\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}(\mu, M)$$

avec

$$\begin{aligned}
\mu &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
M &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2-2a \\ 2 & 5-2a \\ 0 & 1a \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 2-2a \\ 2-2a & 5-4a+2a^2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

On notera que ces résultats s'appliquent car la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est de rang 2. Puisque (U,V) est un vecteur Gaussien, les variables U et V sont indépendantes si et seulement si $\operatorname{cov}(U,V) = 0$, c'est-à-dire si

$$a = 1$$

2) En observant la loi de X, on en déduit

$$\begin{aligned}
X_1 &\sim \mathcal{N}(0,2) \\
\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} &\sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \right)
\end{aligned}$$

On en déduit

$$f(x_1, ., .) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \exp\left(-\frac{x_1^2}{4} \right)$$

La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

est telle que

$$\det(A) = 6 \text{ et } A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

d'où

$$\begin{aligned}
f(x_1,x_2,.) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{6}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(x_1,x_2\right)A^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{6}}\exp\left(-\frac{1}{12}\left(x_1,x_2\right)\begin{pmatrix} 5x_1-2x_2 \\ -2x_1+2x_2 \end{pmatrix}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{6}}\exp\left(-\frac{1}{12}\left(5x_1^2-4x_1x_2+2x_2^2\right)\right)
\end{aligned}$$

La loi conditionnelle de X_2 sachant $X_1 = x_1$ est donc une loi normale de densité

$$\begin{aligned}
f\left(x_2 | x_1\right) &= \frac{f(x_1,x_2,.)}{f(x_1,.,.)} \\
&= \frac{\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\exp\left(-\frac{x_1^2}{4}\right)}{\frac{1}{2\pi\sqrt{6}}\exp\left(-\frac{1}{12}\left(5x_1^2-4x_1x_2+2x_2^2\right)\right)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{6\pi}}\exp\left(-\frac{1}{6}\left(x_2^2-2x_1x_2+x_1^2\right)\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{6\pi}}\exp\left(-\frac{1}{6}\left(x_2-x_1\right)^2\right)
\end{aligned}$$

On reconnait une loi normale de moyenne x_1 et de variance 3

$$X_2 | X_1 = x_1 \sim \mathcal{N}(x_1, 3)$$