Corrigé Partiel Probabilités
13 novembre 2007

Exercice 1

1) • Le changement de variables $X = e^Z$ est clairement bijectif de $\mathbb{R}^+$ dans $[1, +\infty[$

Le jacobien de la transformation s'écrit $J = \left|\frac{dZ}{dX}\right| = \frac{1}{X}$ puisque

$$X = e^Z \Leftrightarrow Z = \ln X$$

La densité de X s'écrit donc $h(x) = a \exp[-a \ln x] \frac{1}{|x|} \mathbb{1}_{[1,+\infty[}(x)$

c'est-à-dire
$$\boxed{h(x) = \frac{a}{x^{a+1}} \mathbb{1}_{[1,+\infty[}(x)}$$

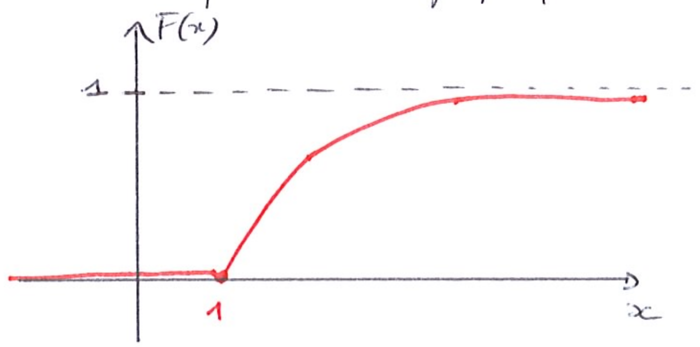
• La fonction de répartition de la va X est définie par

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} h(u)\,du$$

Clairement $F(x) = 0$ si $x < 1$ – Pour $x \geq 1$, on a

$$F(x) = \int_1^x \frac{a}{u^{a+1}}\,du = \left[-u^{-a}\right]_1^x = 1 - \frac{1}{x^a}$$

d'où la représentation graphique suivante



• La moyenne de X est définie par

$$E[X] = \int_{\mathbb{R}} x\,h(x)\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{a}{x^a}\,dx = \left[\frac{a x^{-a+1}}{1-a}\right]_1^{+\infty} = \boxed{\frac{a}{a-1}}$$

La variance de X est définie par

$$\operatorname{Var} X = E[X^2] - E[X]^2 \text{ avec } E[X^2] = \int_1^{+\infty} \frac{a}{x^{a-1}}\,dx = \left[\frac{a x^{-a+2}}{2-a}\right]_1^{+\infty} = \boxed{\frac{a}{a-2}}$$

d'où $$\operatorname{Var} X = \frac{a}{a-2} - \frac{a^2}{(a-1)^2} = \frac{a(\cancel{a^2} - 2a + 1 - \cancel{a^2} + 2a)}{(a-2)(a-1)^2} = \boxed{\frac{a}{(a-2)(a-1)^2}}$$

2) La densité du couple (X,Y) est définie par (X et Y sont indépendantes)

$$f(x,y) = h(x,\cdot)\, h(\cdot,y) = \boxed{\frac{ab}{x^{a+1} y^{b+1}} \mathbb{1}_{[1,+\infty[\times[1,+\infty[}(x,y)}$$

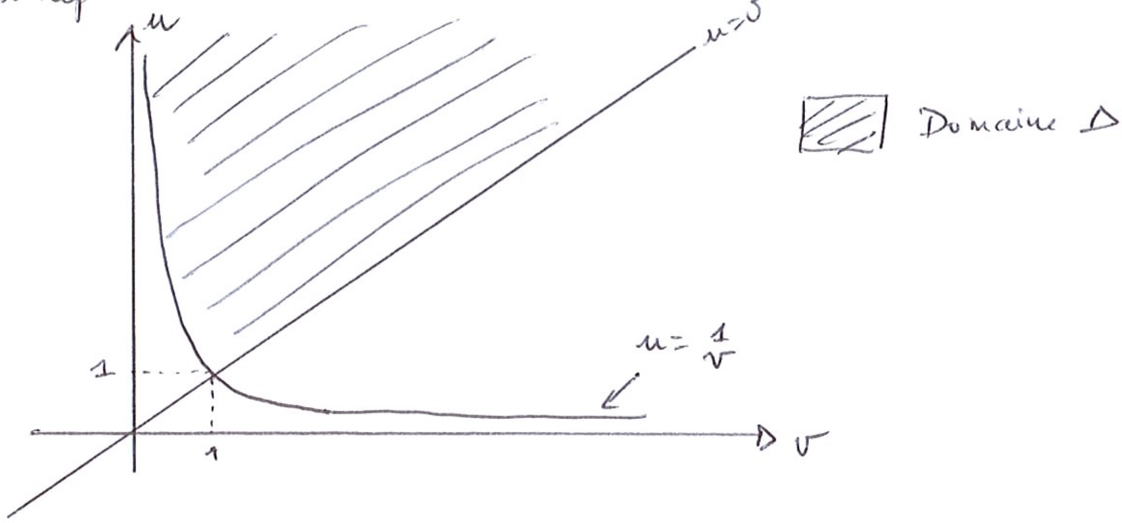
Le changement de variables $U = XY$, $V = \frac{X}{Y}$ est clairement bijectif puisque

$$\begin{cases} X = VY \\ U = VY^2 \end{cases} \iff \begin{cases} Y = \sqrt{\frac{U}{V}} \\ X = \sqrt{UV} \end{cases}$$

Le domaine $[1,+\infty[\times[1,+\infty[$ se transforme par cette bijection en un domaine Δ défini par

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \sqrt{UV} \geq 1 \\ \sqrt{\frac{U}{V}} \geq 1 \end{cases} \iff \boxed{\begin{matrix} UV \geq 1 \\ U \geq V \end{matrix}}$$

qui est représenté ci-dessous



La densité du couple (U,V) s'écrit

$$f(u,v) = \frac{ab\,|J|}{(uv)^{\frac{a+1}{2}} \left(\frac{u}{v}\right)^{\frac{b+1}{2}}} \mathbb{1}_{\Delta}(u,v) \quad \text{avec} \quad J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

c'est-à-dire

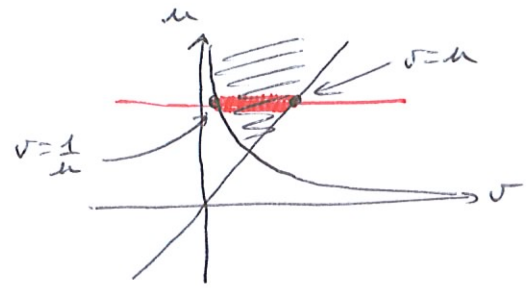
$$f(u,v) = \frac{ab\,|J|}{u^{\frac{a+b+2}{2}}\, v^{\frac{a-b}{2}}} \mathbb{1}_{\Delta}(u,v)$$

Le Jacobien de la transformation se calcule comme suit

$$J = \begin{vmatrix} \sqrt{V}\frac{1}{2\sqrt{U}} & \frac{1}{\sqrt{V}}\frac{1}{2\sqrt{U}} \\ \sqrt{U}\frac{1}{2\sqrt{V}} & \sqrt{U}\left(-\frac{1}{2}\right)V^{-3/2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{4}V^{-1} - \frac{1}{4V} = \boxed{-\frac{1}{2V}}$$

d'où la densité du couple (U,V)

$$\boxed{f(u,v) = \frac{ab}{2} \frac{1}{u^{\frac{a+b+2}{2}} \, v^{\frac{a-b+2}{2}}} \mathbb{1}_\Delta(u,v)}$$



Loi marginale de U

On a $f(u,\cdot) = \int_{\mathbb{R}} f(u,v)\,dv$

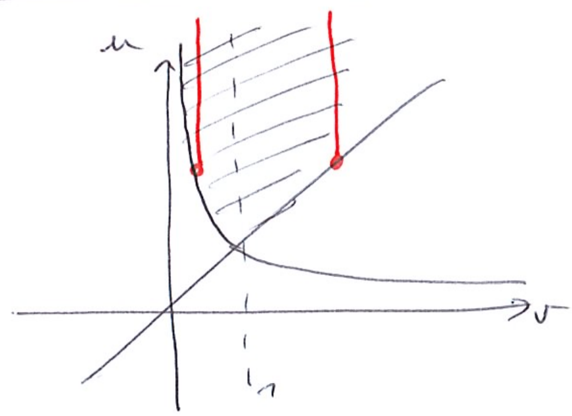
d'où $f(u,\cdot) = 0$ si $u \leq 1$

et pour $u \geq 1$ $\quad f(u,\cdot) = \int_{\frac{1}{u}}^{u} \frac{ab}{2} \frac{1}{u^{\frac{a+b+2}{2}}} v^{\frac{b-a-2}{2}} dv$

$$= \frac{ab}{2u^{\frac{a+b+2}{2}}} \left[\frac{2}{b-a} v^{\frac{b-a}{2}} \right]_{\frac{1}{u}}^{u}$$

$$= \frac{ab}{b-a} \frac{1}{u^{\frac{a+b+2}{2}}} \left[u^{\frac{b-a}{2}} - u^{\frac{a-b}{2}} \right]$$

soit $\boxed{f(u,\cdot) = \frac{ab}{b-a} \left[\frac{1}{u^{a+1}} - \frac{1}{u^{b+1}} \right] \mathbb{1}_{[1,+\infty[}(u)}$



Loi marginale de V

La densité de V est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$

Pour $v \in]0,1]$, on a

$$f(\cdot,v) = \int_{\mathbb{R}} f(u,v)\,du$$

$$= \int_{\frac{1}{v}}^{+\infty} \frac{ab}{2} \frac{1}{u^{\frac{a+b+2}{2}}} \frac{1}{v^{\frac{a-b+2}{2}}} du$$

$$= \frac{ab}{2} \frac{1}{v^{\frac{a-b+2}{2}}} \left[\frac{-2}{a+b} u^{-\frac{a+b}{2}} \right]_{\frac{1}{v}}^{+\infty} = \frac{ab}{2} \frac{2}{a+b} \frac{1}{v^{\frac{a-b+2}{2}}} \frac{1}{(v^{\frac{a+b}{2}})^{-1}}$$

c'est à dire $\quad \boxed{f(\cdot,v) = \frac{ab}{a+b} v^{b-1} \quad v \in]0,1[}$

De même si $v \in [1,+\infty[$, on a

$$f(\cdot,v) = \int_v^{+\infty} \frac{ab}{2}\,\frac{1}{u^{\frac{a+b+2}{2}}}\,\frac{1}{v^{\frac{a-b}{2}+2}}\,dv = \frac{ab}{a+b}\,\frac{1}{v^{\frac{a-b+2}{2}}}\left[u^{-\frac{a+b}{2}}\right]_v^{+\infty}$$

c'est-à-dire

$$f(\cdot,v) = \frac{ab}{a+b}\,\frac{1}{v^{\frac{a-b+2}{2}}}\,\frac{1}{v^{\frac{a+b}{2}}} = \boxed{\frac{ab}{a+b}\,\frac{1}{v^{a+1}} \quad \text{si } v \geq 1}$$

Vérifications

- $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(u,\cdot)\,du = \frac{ab}{b-a}\left[\frac{1}{u^a}\left(-\frac{1}{a}\right) - \frac{1}{u^b}\left(-\frac{1}{b}\right)\right]_1^{+\infty} = \frac{ab}{b-a}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right) = \boxed{1}$

- $\displaystyle\int_0^1 f(\cdot,v)\,dv = \frac{ab}{b+a}\left[v^{+b}\left(+\frac{1}{b}\right)\right]_0^1 = \boxed{\frac{a}{b+a}}$

$\displaystyle\int_1^{+\infty} f(\cdot,v)\,dv = \frac{ab}{a+b}\left[v^{-a}\left(-\frac{1}{a}\right)\right]_1^{+\infty} = \boxed{\frac{b}{a+b}}$

d'où $\displaystyle\boxed{\int_0^{+\infty} f(\cdot,v)\,dv = 1}$

- Indépendance des variables U et V

Il y a plusieurs façons de montrer que U et V ne sont pas des variables indépendantes. Par exemple, le domaine de définition du couple (U,V) n'est pas un pavé, ou alors pour $u \in [1,+\infty[$ $\quad f(u,v) \neq f(u,\cdot)\,f(\cdot,v)$

- covariance du couple (U,V)

$$\mathrm{cov}(U,V) = E[UV] - E[U]E[V] = E\left[XY\frac{X}{Y}\right] - E[XY]\,E\left[\frac{X}{Y}\right]$$

En utilisant l'indépendance entre les variables X et Y, on obtient

$$\mathrm{cov}(U,V) = E[X^2] - E[X]\,E[Y]\,E[X]\,E\left[\frac{1}{Y}\right]$$

$$= E[X^2] - E[X]^2\,E[Y]\,E\left[\frac{1}{Y}\right]$$

Mais $E[X] = \dfrac{a}{a-1}$, $E[X^2] = \dfrac{a}{a-2}$, $E[Y] = \dfrac{b}{b-1}$ et

$$E\left[\frac{1}{Y}\right] = \int_1^{+\infty} \frac{1}{y}\,\frac{b}{y^{b+1}}\,dy = b\left[\frac{y^{-b-1}}{-b-1}\right]_1^{+\infty} = \boxed{\frac{b}{b+1}}$$

d'où $$\mathrm{cov}(U,V) = \frac{a}{a-2} - \left(\frac{a}{a-1}\right)^2 \frac{b}{b-1}\,\frac{b}{b+1} = \boxed{\frac{a}{a-2} - \frac{a^2}{(a-1)^2}\,\frac{b^2}{b^2-1}}$$

$$\mathrm{cov}(U,V) = 0 \iff \frac{b^2}{b^2-1} = \frac{a}{a-2}\,\frac{(a-1)^2}{a^2} \iff b^2\,a(a-2) = (b^2-1)(a-1)^2$$

$$\iff b^2\left[a^2 - 2a - a^2 + 2a - 1\right] = -(a-1)^2$$

c'est-à-dire $b^2=(a-1)^2 \iff b=a-1$ ou $b=1-a$

Comme a et b sont tous deux positifs, on a

$$\operatorname{cov}(U,V)=0 \iff \begin{cases} a\in]0,1[\text{ et } b=1-a \\ \text{ou} \\ a\in]1,+\infty[\text{ et } b=a-1 \end{cases}$$

Exercice 2

1) On a
$$\begin{pmatrix} U\\ V\\ W\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ \rho & \sqrt{1-\rho^2} & 0\\ \rho & 0 & \sqrt{1-\rho^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} X\\ Y\\ Z\end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} X\\ Y\\ Z\end{pmatrix}$$

où M est une matrice de rang 3 (par exemple, on montre facilement que $\det M = 1-\rho^2 \neq 0$

Donc d'après les résultats du cours concernant les changements de variables affines d'un vecteur Gaussien

$$\begin{pmatrix} U\\ V\\ W\end{pmatrix} \sim N_3\left(\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}, M\Sigma M^T\right)$$

avec
$$M\Sigma M^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ \rho & \sqrt{1-\rho^2} & 0\\ \rho & 0 & \sqrt{1-\rho^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho\\ 0 & \sqrt{1-\rho^2} & 0\\ 0 & 0 & \sqrt{1-\rho^2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho\\ \rho & 1 & \rho^2\\ \rho & \rho^2 & 1\end{pmatrix}$$

donc
$$\boxed{\begin{pmatrix} U\\ V\\ W\end{pmatrix} \sim N_3\left(\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho\\ \rho & 1 & \rho^2\\ \rho & \rho^2 & 1\end{pmatrix}\right)}$$

2) La densité conditionnelle de $V|W$ est définie par
$$f(v|w) = \frac{f(\cdot,v,w)}{f(\cdot,\cdot,w)}$$

Mais $\begin{pmatrix} V\\ W\end{pmatrix} \sim N_2\left(\begin{pmatrix} 0\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \rho^2\\ \rho^2 & 1\end{pmatrix}\right)$ et $W\sim N(0,1)$, donc

$$f(\cdot,\cdot,w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{w^2}{2}\right)$$
$$f(\cdot,v,w) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^4}}\exp\left[-\frac{1}{2}(v\ w)\,\Sigma_{V,W}^{-1}\begin{pmatrix} v\\ w\end{pmatrix}\right] \text{ avec } \Sigma_{V,W} = \begin{pmatrix} 1 & \rho^2\\ \rho^2 & 1\end{pmatrix}$$

$$\Sigma_{V,W}^{-1} = \frac{1}{1-\rho^4}\begin{pmatrix} 1 & -\rho^2 \\ -\rho^2 & 1 \end{pmatrix}$$

d'où $$(v\ w)\,\Sigma_{V,W}^{-1}\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \frac{(v\ w)}{1-\rho^4}\begin{bmatrix} v - \rho^2 w \\ -\rho^2 v + w \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{1-\rho^4}\left[v^2 + w^2 - 2\rho^2 v w\right]$$

d'où $$f(v|w) = \frac{f(\cdot, v, w)}{f(\cdot,\cdot, w)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{1-\rho^4}} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^4)}\left(v^2+w^2-2\rho^2 v w\right) + \frac{1}{2}w^2\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{1-\rho^4}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^4)}\left[v^2+w^2-2\rho^2 v w - (1-\rho^4)w^2\right]\right.$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{1-\rho^4}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{v^2-2\rho^2 v w + \rho^4 w^2}{1-\rho^4}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^4)}} \exp\left[-\frac{1}{2}\frac{(v-\rho^2 w)^2}{1-\rho^4}\right]$$

On reconnaît une loi Normale de moyenne $\rho^2 w$ et de variance $1-\rho^4$

d'où $$\boxed{V|W \sim N(\rho^2 w, 1-\rho^4)}$$

3) on a $$\begin{pmatrix} U - aV - bW \\ V \\ W \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -a & -b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix}$$

Comme $\det A = 1$, A est de rang 3, donc $\begin{pmatrix} U - aV - bW \\ V \\ W \end{pmatrix}$ suit une loi normale à 3 dimensions de vecteur moyenne $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et de matrice de covariance

$A\,\Sigma_{U,V,W}\,A^T$

3) Des calculs élémentais conduisent à

$$A\,\Sigma_{U,V,W}\,A^T = \begin{pmatrix} 1 & -a & -b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho \\ \rho & 1 & \rho^2 \\ \rho & \rho^2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ -b & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -a & -b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1-(a+b)\rho & \rho & \rho \\ \rho-a-b\rho^2 & 1 & \rho^2 \\ \rho-a\rho^2-b & \rho^2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \left(\begin{array}{c|cc} m_{11} & \times & \times \\ \hline \times & 1 & \rho^2 \\ \times & \rho^2 & 1 \end{array}\right) \quad (*)$$

avec $m_{11} = 1-(a+b)\rho - a(\rho-a-b\rho^2) - b(\rho-a\rho^2-b)$

$$\boxed{m_{11} = 1-2a\rho-2b\rho+2ab\rho^2+a^2+b^2}$$

On en déduit donc que $\boxed{\begin{array}{l} U-aV-bW \sim N(0, m_{11}) \\ \begin{pmatrix} V \\ W \end{pmatrix} \sim N_2\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \rho^2 \\ \rho^2 & 1 \end{pmatrix}\right) \end{array}}$

4) $U-aV-bW$ et $\begin{pmatrix} V \\ W \end{pmatrix}$ sont indépendants si les termes $\times$ de la matrice de covariance $A\,\Sigma_{U,V,W}\,A^T$ sont nuls, c'est-à-dire si

$$\begin{cases} \rho-a-b\rho^2 = 0 \\ \rho-a\rho^2-b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = \rho-b\rho^2 \\ \rho-b-\rho^2(\rho-b\rho^2) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = \rho-b\rho^2 \\ \rho(1-\rho^2) = b(1-\rho^4) \end{cases}$$

$$\iff b = \frac{\rho}{1+\rho^2}$$

$$a = \rho - \frac{\rho^3}{1+\rho^2} = \rho\,\frac{1+\rho^2-\rho^2}{1+\rho^2} = \frac{\rho}{1+\rho^2}$$

donc le vecteur $\binom{V}{W}$ est indépendant de $U - aV - bW$ si

$$\boxed{a = b = \frac{\rho}{1+\rho^2}}$$

5) On a $E[U \mid V,W] = E[U - \xi + \xi \mid V,W]$

$$= E[U - \xi \mid V,W] + E[\xi \mid V,W]$$

$$= E[U - \xi] + \xi$$

car $U - \xi$ indépendant de $\binom{V}{W}$
pour $a = b = \frac{\rho}{\rho^2+1}$

$$= E[U] - E[aV + bW] + aV + bW$$

$$= 0 - 0 + \frac{\rho}{\rho^2+1}(V+W)$$

donc $\boxed{E[U \mid V,W] = \frac{\rho}{\rho^2+1}(V+W)}$