Examen Mardi 17 Novembre 2009

$\boxed{\textbf{Exercice } 1}$

Enoncé

On considère deux variables aléatoires indépendantes X et Y définies par

$$\begin{aligned} P[X=1] &= p \text{ et } P[X=0]=1-p \\ P[Y=1] &= r \text{ et } P[Y=-1]=1-r \end{aligned}$$

et les variables aléatoires Z et T définies par

$$\begin{cases} Z = XY \\ T = X \end{cases}$$

1) Quelle est la loi du couple (Z,T) ?
2) Quelle est la loi marginales de Z ?
3) Déterminer $E[Z]$ et $\mathrm{var}[Z]$.
4) Déterminer la covariance du couple (Z,T) notée $\mathrm{cov}[Z,T]$.

Réponses

1) Puisque X et Y sont des variables aléatoires indépendantes, on a

$$\begin{aligned} P[X=1,Y=1] &= P[X=1]\,P[Y=A] = pr \\ P[X=1,Y=-1] &= P[X=1]\,P[Y=-1] = p(1-r) \\ P[X=0,Y=1] &= P[X=0]\,P[Y=1] = (1-p)\,r \\ P[X=0,Y=-1] &= P[X=0]\,P[Y=-1] = (1-p)(1-r) \end{aligned}$$

Le changement de variables permettant de passer du couple (X,Y) au couple (Z,T) est tel que

$$\begin{aligned} X &= 1, Y=1 \Rightarrow Z=1, T=1 \\ X &= 1, Y=-1 \Rightarrow Z=-1, T=1 \\ X &= 0, Y=1 \Rightarrow Z=0, T=0 \\ X &= 0, Y=-1 \Rightarrow Z=0, T=0 \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} \boxed{P[Z=0,T=0]} &= P[X=0,Y=1]+P[X=0,Y=-1] = \boxed{1-p} \\ \boxed{P[Z=1,T=1]} &= P[X=1,Y=1] = \boxed{pr} \\ \boxed{P[Z=-1,T=1]} &= P[X=1,Y=-1] = \boxed{p(1-r)} \end{aligned}$$

2) La loi marginale de Z est définie comme suit

$$\begin{aligned}
\boxed{P[Z=0]} &= P[Z=0,T=0]=\boxed{1-p}\\
\boxed{P[Z=1]} &= P[Z=1,T=1]=\boxed{pr}\\
\boxed{P[Z=-1]} &= P[Z=-1,T=1]=\boxed{p(1-r)}
\end{aligned}$$

3) La moyenne de Z est définie par

$$E[Z]=0\times P[Z=0]+1\times P[Z=1]+(-1)\times P[Z=-1]=pr-(p-pr)=\boxed{p(2r-1)}$$

La variance de Z s'écrit $\text{var}[Z]=E[Z^2]-E[Z]^2$ avec

$$E\left[Z^2\right]=0\times(1-p)+1^2\times pr+(-1)^2\times p(1-r)=\boxed{p}$$

Donc

$$\text{var}[Z]=\boxed{p-p^2(2r-1)^2}$$

4) La covariance du couple (Z,T) est définie par

$$\begin{aligned}
\text{cov}(Z,T) &= E[ZT]-E[Z]E[T]\\
&= E\left[X^2Y\right]-p(2r-1)E[X]
\end{aligned}$$

Comme X et Y sont des variables aléatoires indépendantes et que $E[X]=p$, on a

$$\begin{aligned}
\text{cov}(Z,T) &= E\left[X^2\right]E[Y]-p^2(2r-1)\\
&= E[X]E[Y]-p^2(2r-1)\\
&= p(2r-1)-p^2(2r-1)\\
&= \boxed{p(1-p)(2r-1)}
\end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{Exercice } 2}$

Enoncé

On considère deux variables aléatoires indépendantes X et Y de lois uniformes sur les intervalles $[0,1]$ et $[-1,1]$, c'est-à-dire possédant les densités

$$f(x,.) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in [0,1] \\ 0 \text{ si } x \notin [0,1] \end{cases} \quad \text{et } f(.,y) = \begin{cases} \frac{1}{2} \text{ si } y \in [-1,1] \\ 0 \text{ si } y \notin [-1,1] \end{cases}$$

et les variables aléatoires Z et T définies par

$$\begin{cases} Z = XY \\ T = X \end{cases}$$

1) Quelle est la densité du couple (Z,T) ? Représenter graphiquement les valeurs possibles du couple (Z,T).
2) Quelle est la loi marginale de Z ? Représenter graphiquement la densité de Z.
3) Déterminer $E[Z]$ et $\text{var}[Z]$.
4) Déterminer la covariance du couple (Z,T) notée $\text{cov}[Z,T]$. Les variables Z et T sont-elles indépendantes ?

Réponses

1) Puisque les variables aléatoires X et Y sont indépendantes, on a

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(x,.)f(.,y) \\ &= \frac{1}{2} I_{[0,1]}(x) I_{[-1,1]}(y) \end{aligned}$$

où $I_{[0,1]}(x)$ est la fonction indicatrice sur l'intervalle $[0,1]$ et $I_{[-1,1]}(y)$ est la fonction indicatrice sur l'ensemble $[-1,1]$. Le couple (X,Y) est donc défini sur le pavé $[0,1] \times [-1,1]$. Le changement de variables $Z = XY$ et $T = X$ est bijectif puisque

$$\begin{cases} Z = XY \\ T = X \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} X = T \\ Y = \frac{Z}{T} \end{cases}$$

Le jacobien de ce changement de variables est

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial Z} & \frac{\partial Y}{\partial Z} \\ \frac{\partial X}{\partial T} & \frac{\partial Y}{\partial T} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{T} \\ 1 & \frac{-Z}{T^2} \end{vmatrix} = \boxed{\frac{-1}{T}}$$

On en déduit la densité du couple (Z,T) :

$$g(z,t) = \begin{cases} \frac{1}{2t} \text{ si } (z,t) \in \Delta \\ 0 \quad \text{sinon} \end{cases}$$

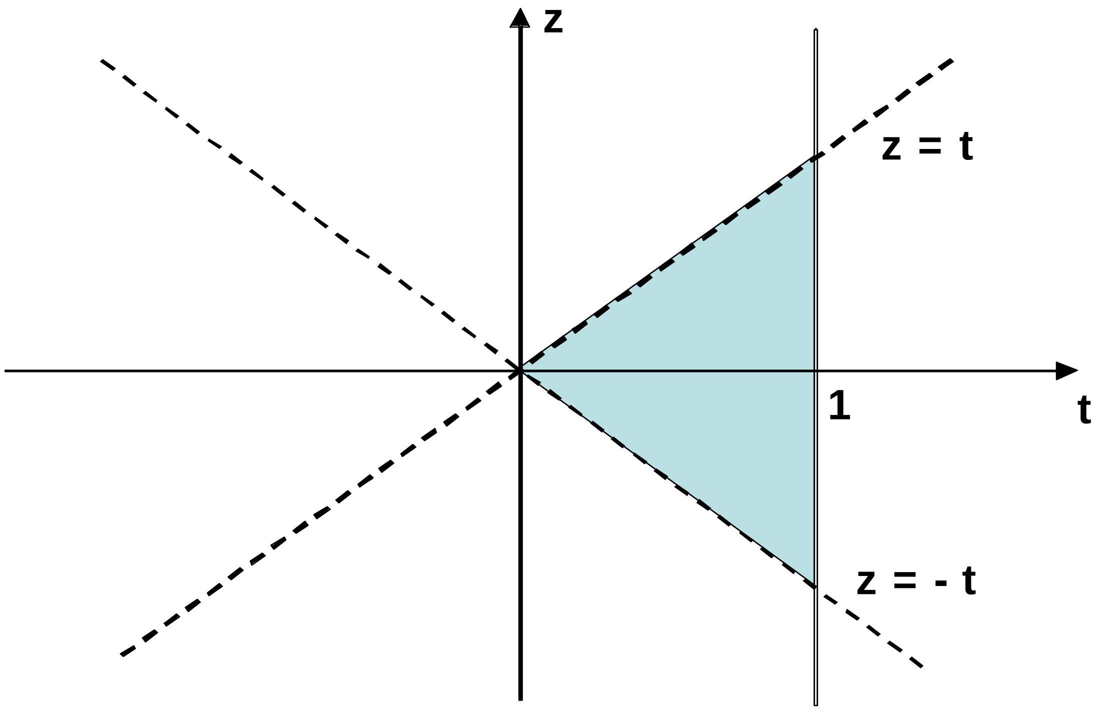
c'est-à-dire

$$\boxed{g(z,t) = \frac{1}{2t} I_\Delta(z,t)}$$

Le domaine Δ se détermine comme suit

$$\begin{cases} 0 < x < 1 \\ -1 < y < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < t < 1 \\ -1 < \frac{z}{t} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < t < 1 \\ -t < z < t \end{cases}$$

Il est représenté en bleu sur la figure ci-dessous



Domaine du couple (Z, T).

2) Pour avoir la loi de Z, il suffit d'intégrer la densité du couple par rapport à t

$$g(z, .) = \int_{\mathbb{R}} g(z, t)dt$$

D'après le domaine représenté ci-dessus, on voit que $g(z, .) = 0$ si $z \notin [-1, 1]$. De plus

- Pour $z \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} g(z, .) &= \int_z^1 \frac{1}{2t} dt \\ &= -\frac{1}{2} \ln z \end{aligned}$$

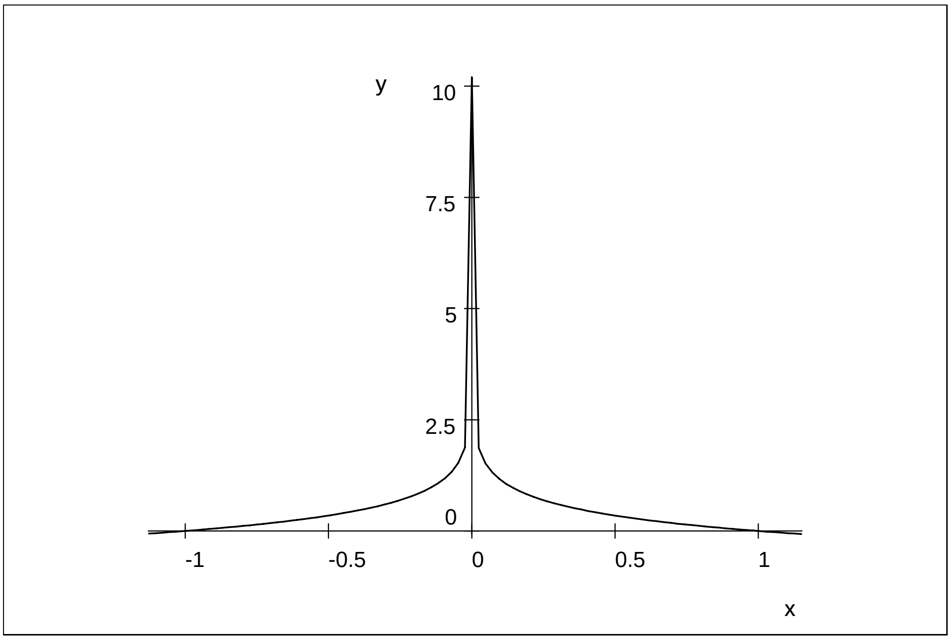
- Pour $z \in [-1, 0]$

$$\begin{aligned} g(z, .) &= \int_{-z}^1 \frac{1}{2t} dt \\ &= -\frac{1}{2} \ln(-z) \end{aligned}$$

Finalement

$$g(z,.) = \boxed{-\frac{1}{2}\ln(|z|)\, I_{-1,1}(z)}$$

Le graphe de la fonction $y = -\frac{1}{2}\ln(|x|)$ est représenté ci-dessous



3) Le calcul direct de $E[Z]$ et de var$[Z]$ à partir de la densité de Z est délicat. Par contre, si on utilise le fait que $Z = XY$, on a facilement

$$\begin{aligned}
E[Z] &= E[XY] = E[X]\,E[Y] = \frac{1}{2} \times 0 = 0 \\
\operatorname{var}[Z] &= E\left[Z^2\right] - E[Z]^2 \\
&= E\left[X^2Y^2\right] \\
&= E\left[X^2\right] E\left[Y^2\right] \\
&= \left(\int_0^1 x^2 dx\right)\left(\int_{-1}^1 \frac{y^2}{2} dy\right) \\
&= \boxed{\frac{1}{9}}
\end{aligned}$$

4) La covariance du couple (Z,T) est définie par

$$\begin{aligned}
\operatorname{cov}(Z,T) &= E[ZT] - E[Z]\,E[T] \\
&= E[ZT] \\
&= E\left[X^2Y\right] \\
&= E\left[X^2\right] E[Y] \\
&= \boxed{0}
\end{aligned}$$

Les variables aléatoires Z et T ne sont pas indépendantes car par exemple le support de la densité du couple n'est pas le pavé $[0,1] \times [-1,1]$.

Exercice 3

Enoncé

On considère une variable aléatoire X de loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$ et une variable aléatoire Y indépendante de X définie par

$$P[Y=1]=r \text{ et } P[Y=-1]=1-r$$

avec $r\neq\frac{1}{2}$.

1) Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire X.

2) Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire $Z=XY$. En déduire la densité de Z que l'on représentera graphiquement.

3) Déterminer la covariance du couple (Z,X) notée $\mathrm{cov}(Z,X)$. Les variables aléatoires Z et X sont-elles indépendantes ?

Réponses

1) La fonction de répartition de la variable aléatoire X est définie par

$$F(x)=P[X<x]=\int_{-\infty}^{x} I_{[0,1]}(u)du$$

Donc

$$F_X(x)=\begin{cases} 0 \text{ si } x<0 \\ 1 \text{ si } x>1 \\ \int_0^x du = x \text{ si } x\in[0,1] \end{cases}$$

2) La fonction de répartition de la variable aléatoire $Z=XY$ est définie par

$$\begin{aligned} G(z) &= P[Z<z] \\ &= P[XY<z] \\ &= P[\text{“}X<z \text{ et } Y=1\text{” ou “}-X<z \text{ et } Y=-1\text{”}] \end{aligned}$$

En utilisant l'indépendance entre les variables X et Y, on obtient

$$G(z)=rF_X(z)+(1-r)P[X>-z]$$

c'est-à-dire

$$G(z)=rF_X(z)+(1-r)[1-F_X(-z)]$$

Il est clair que la variable $Z=XY$ est à valeurs dans l'intervalle $[-1,+1]$ donc sa fonction de répartition vérifie

$$G(z)=\begin{cases} 0 \text{ si } z<-1 \\ 1 \text{ si } z>1 \end{cases}$$

- si $z\in[-1,0]$, en utilisant le résultat de la question 1), on a $F_X(z)=0$ et $F_X(-z)=-z$, d'où

$$G(z)=(1-r)(1+z)$$

- si $z \in [0,1]$, en utilisant le résultat de la question 1), on a $F_X(z) = z$ et $F_X(-z) = 0$, d'où

$$G(z) = 1 - r + rz$$

En dérivant $G(z)$, on en déduit la densité de la variable aléatoire Z

$$g(z) = G'(z) = \begin{cases} 0 \text{ si } z \notin [-1,1] \\ 1-r \text{ si } z \in [-1,0] \\ r \text{ si } z \in [0,1] \end{cases}$$

4) La covariance du couple (Z, X) s'écrit

$$\begin{aligned} \operatorname{cov}(Z,X) &= E[ZX] - E[Z]E[X] \\ &= E\left[X^2 Y\right] - E[XY]E[X] \\ &= E\left[X^2\right]E[Y] - E[Y]E\left[X^2\right] \\ &= E[Y]\operatorname{var}[X] \\ &= (2r-1) \times \frac{1}{12} \\ &= \frac{2r-1}{12} \end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{Exercice } 4}$

Enoncé

On considère une suite de variables aléatoires indépendantes X_k, $k \in \mathbb{N}$ de lois de Bernoulli de paramètre p, c'est-à-dire

$$P\left[X_k = 1\right] = p \text{ et } P\left[X_k = 0\right] = q = 1 - p, \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

1) Déterminer la fonction caractéristique de la variable aléatoire X_k puis celle de $Y = \sum_{k=1}^{n} X_k$. En déduire la loi de Y.

2) En utilisant un des théorèmes du cours, montrer que la variable aléatoire

$$Z = \frac{Y - np}{\sqrt{npq}}$$

converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi. En déduire une approximation de $P\left[Y > y_0\right]$ (pour n suffisamment grand) que l'on exprimera en fonction de y_0, n, p, q et

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du$$

3) Montrer que $T = \frac{Y}{n}$ converge en moyenne quadratique vers p.

Réponses

1) La fonction caractéristique de la variable aléatoire X_k est définie par

$$\begin{aligned} \phi_{X_x}(t) &= E\left[e^{itX_k}\right] \\ &= pe^{it} + q \end{aligned}$$

On en déduit la fonction caractéristique de $Y = \sum_{k=1}^{n} X_k$

$$\begin{aligned} \phi_Y(t) &= E\left[e^{itY}\right] \\ &= E\left[e^{it\sum_{k=1}^{n} X_k}\right] \\ &= E\left[\prod_{k=1}^{n} e^{itX_k}\right] \end{aligned}$$

En utilisant l'indépendance des variables X_k, on obtient

$$\begin{aligned} \phi_Y(t) &= \prod_{k=1}^{n} E\left[e^{itX_k}\right] \\ &= \prod_{k=1}^{n} \phi_{X_x}(t) \\ &= \prod_{k=1}^{n} \left(pe^{it} + q\right) \\ &= \left(pe^{it} + q\right)^n \end{aligned}$$

On reconnait la fonction caractéristique d'une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ donc

$$Y \sim \mathcal{B}(n,p)$$

2) On sait que la moyenne et la variance de Y sont

$$\begin{aligned} E[Y] &= np \\ \operatorname{var}[Y] &= npq \end{aligned}$$

Le théorème de la limite centrale s'écrit alors

$$Z = \frac{Y-np}{\sqrt{npq}} \xrightarrow{L} \mathcal{N}(0,1)$$

où $\xrightarrow{L}$désigne la convergence en loi. Pour n suffisamment grand, on peut approcher la loi de Z par une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. On en déduit

$$\begin{aligned} P[Y > y_0] &= P[Y > y_0] \\ &= P\left[\frac{Y-np}{\sqrt{npq}} > \frac{y_0-np}{\sqrt{npq}}\right] \\ &= P\left[Z > \frac{y_0-np}{\sqrt{npq}}\right] \\ &\approx \int_{\frac{y_0-np}{\sqrt{npq}}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du \\ &\approx 1-\Phi\left(\frac{y_0-np}{\sqrt{npq}}\right) \end{aligned}$$

3) $T = \frac{Y}{n}$ converge en moyenne quadratique vers p si et seulement si

$$E\left[(T-p)^2\right] \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Mais

$$\begin{aligned} E\left[(T-p)^2\right] &= E\left[\left(\frac{Y}{n}-p\right)^2\right] \\ &= E\left[\left(\frac{Y-np}{n}\right)^2\right] \\ &= \frac{1}{n^2}\operatorname{var}[Y] \end{aligned}$$

Comme Y suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$, on sait que

$$\operatorname{var}[Y] = npq$$

d'où

$$E\left[(T-p)^2\right] = \frac{pq}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$