Examen Mardi 2 Novembre 2010

Exercice 1

Enoncé

On considère un couple de variables aléatoires continues (X, Y) dont la densité est définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \exp\left[-\left(x+y\right)\right] \text{ si } x > 0 \text{ et } y > 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

et les variables aléatoires Z et T définies par

$$Z = X + Y \text{ et } T = \frac{Y}{X}$$

1) Montrer que le changement de variables liant les couples (X, Y) et (Z, T) est bijectif et représenter graphiquement les valeurs possibles du couple (Z, T).
2) Quelle est la densité du couple (Z, T) ?
3) Déterminer les lois marginales de Z et T. En s'aidant des tables de lois, reconnaître la loi de Z. Les variables aléatoires Z et T sont-elles indépendantes ?
4) Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire T et représenter la graphiquement

Réponses

1) Le changement de variables $Z = X + Y$ et $T = \frac{Y-1}{X+1}$ est bijectif puisque

$$\begin{cases} Z = X + Y \\ T = \frac{Y}{X} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} Z = X + TX \\ Y = TX \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} X = \frac{Z}{1+T} \\ Y = \frac{ZT}{1+T} \end{cases}$$

De plus

$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \frac{z}{1+t} > 0 \\ \frac{zt}{1+t} > 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} z > 0 \\ t > 0 \end{cases}$$

Le changement de variables est donc bijectif de $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$.
2) Le jacobien du changement de variables est

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial Z} & \frac{\partial Y}{\partial Z} \\ \frac{\partial X}{\partial T} & \frac{\partial Y}{\partial T} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{1+T} & \frac{T}{1+T} \\ \frac{-Z}{(1+T)^2} & \frac{Z}{(1+T)^2} \end{vmatrix} = \boxed{\frac{z}{(1+t)^2}}$$

Puisque $z > 0$, on a $|J| = \frac{z}{(1+t)^2}$. On en déduit la densité du couple (Z, T) :

$$\boxed{g(z,t) = \frac{z\exp(-z)}{(1+t)^2} I_{\mathbb{R}^{+*}\times\mathbb{R}^{+*}}(z,t)}$$

3) Pour avoir la loi de Z, il suffit d'intégrer la densité du couple par rapport à t

$$g(z,.) = \int_{\mathbb{R}} g(z,t)dt$$

D'après le domaine de loi du couple (Z,T), on voit que $g(z,.) = 0$ si $z < 0$ et que pour $z > 0$

$$\begin{aligned} g(z,.) &= \int_0^{\infty} \frac{z\exp(-z)}{(1+t)^2} dt \\ &= z\exp(-z) \end{aligned}$$

Finalement

$$g(z,.) = \boxed{z\exp(-z)\, I_{\mathbb{R}^+}(z)}$$

D'après les tables de lois, Z suit une loi gamma $\Gamma(1,2)$.
De même

$$g(.,t) = 0 \text{ si } t < 0$$

De plus, pour $t > 0$

$$\begin{aligned} g(.,t) &= \int_{\mathbb{R}} g(z,t)dz \\ &= \int_0^{\infty} \frac{z\exp(-z)}{(1+t)^2} dz \\ &= \frac{\Gamma(2)}{(1+t)^2} \\ &= \frac{1}{(1+t)^2} \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$g(.,t) = \boxed{\tfrac{1}{(1+t)^2} I_{\mathbb{R}^+}(t)}$$

On remarque que $g(z,t) = g(z,.)g(.,t)$ pour tout couple (z,t). Les varianles aléatoires Z et T sont donc indépendantes.
4) La fonction de répartition de la variable aléatoire T est définie par

$$F(t) = P[T < t] = \int_{-\infty}^{t} g(.,u)du$$

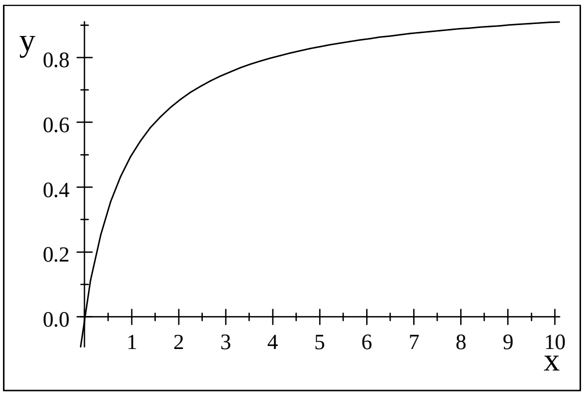
Puisque $g(.,u) = 0$ si $u < 0$, on a clairement

$$F(t) = 0 \text{ si } t < 0$$

Par ailleurs, pour $t > 0$, on obtient

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_0^{t} \frac{1}{(1+u)^2} du \\ &= \left[\frac{-1}{1+u}\right]_0^t \\ &= 1 - \frac{1}{1+t} \\ &= \frac{t}{1+t} \end{aligned}$$

d'où le graphe suivant



Exercice 2

Enoncé
On lance une pièce de monnaie plusieurs fois et on s'arrête lorsqu'on obtient le premier "pile". On appelle X le nombre de lancers effectués et on suppose que ces lancers sont indépendants..
1) Montrer que X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^* = \{1, 2, ...\}$ telle que

$$P[X = n] = pq^{n-1},\ n \in \mathbb{N}^*$$

où p est la probabilité d'avoir "pile" pour un lancer de pièce et $q = 1 - p$.
2) Déterminer $P[X > l]$ pour $l \in \mathbb{N}$ et montrer que

$$P[X > k + l | X > k] = P[X > l], \qquad \forall (k, l) \in \mathbb{N}^2$$

On dit que la loi de X est une loi "sans mémoire". En supposant que X est un temps d'attente, pouvez vous expliquer cette dénomination ?
3) On considère deux variables aléatoires X et Y indépendantes de même loi géométrique de paramètre p.

- Déterminer $P[X - Y = 0]$ en fonction de p uniquement.
- Déterminer la loi de $Z = X + Y$ puis $E(Z)$ et $\text{var}(Z)$.

Réponses
1) Si le premier lancer est "pile", on s'arrête et on a fait un lancer, donc

$$P[X = 1] = P[\text{“pile”au } 1^{er} \text{ tirage}] = p$$

Pour que $X = 2$, il faut que le premier tirage ait donné "face" et le second "pile", donc

$$P[X = 2] = P\left[\text{“face”au } 1^{er} \text{ tirage et “pile”au } 2^{\text{ème}} \text{ tirage }\right] = pq$$

et ainsi de suite

$$P[X = n] = P\left[\text{“face”au } 1^{er} \text{ tirage, ..., “face”au } (n-1)^{\grave{e}me} \text{ tirage et “pile”au } n^{\grave{e}me} \text{ tirage }\right] = q^{n-1}p$$

ce qui est bien le résultat attendu.
2) On a

$$P[X > 0] = 1$$

et

$$P[X > 1] = 1 - P[X = 1] = 1 - p = q$$

Pour un entier $l \geq 1$ quelconque, on obtient

$$\begin{aligned}
P\left[X > l\right] &= 1 - \sum_{k=1}^{l} P\left[X = k\right] \\
&= 1 - \sum_{k=1}^{l} pq^{k-1} \\
&= 1 - p(1 + q + ... + q^{l-1}) \\
&= 1 - p\frac{1 - q^l}{1 - q} \\
&= q^l
\end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned}
P\left[X > k + l \middle| X > k\right] &= \frac{P\left[X > k + l \text{ et } X > k\right]}{P\left[X > k\right]} \\
&= \frac{P\left[X > k + l\right]}{P\left[X > k\right]} \text{ car } l > 0 \\
&= \frac{q^{k+l}}{q^k} = q^l
\end{aligned}$$

Donc, pour tous entiers k et l, on a

$$P\left[X > k + l \middle| X > k\right] = P\left[X > l\right]$$

Pour comprendre la signification de cette relation, supposons que X soit un temps d'attente. La première probabilité est la probabilité que ce temps d'attente soit supérieur à $k + l$ sachant qu'on a déjà attendu k instants (et donc on sait que le temps d'attente est supérieur à k), c'est-à-dire la probabilité d'attendre encore l instants sachant qu'on a déjà attendu k instants. La relation

$$P\left[X > k + l \middle| X > k\right] = P\left[X > l\right]$$

indique que cette probabilité est égale à la probabilité d'attendre l instants. En quelque sorte, le fait d'avoir attendu un certain temps n'a pas d'influence sur le temps qu'il reste à attendre.
4) On considère deux variables aléatoires indépendantes de même loi géométrique de paramètre p.

- $$\begin{aligned}
P\left[X - Y = 0\right] &= P\left[X = Y = 1 \text{ ou } X = Y = 2 \text{ ou } ...\right] \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} P\left[X = k \text{ et } Y = k\right] \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} P[X = k]P\left[Y = k\right] \text{ (indépendance des va } X \text{ et } Y\text{)} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \left(pq^{k-1}\right)^2 \\
&= \frac{p^2}{1 - q^2} = \frac{p^2}{(1 - q)(1 + q)} = \frac{p}{1 + q} = \frac{p}{2 - p}
\end{aligned}$$

- Comme X et Y sont des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, la variable $Z = X + Y$ est à valeurs dans $2 + \mathbb{N} = \{2, 3, ...\}$. De plus, pour $k \in 2 + \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
P[X+Y=k] &= P[\text{"}X=1, Y=k-1\text{" ou "}X=2, Y=k-2\text{" ou ... ou "}X=k-1, Y=1\text{"}] \\
&= \sum_{l=1}^{k-1} P[X=l, Y=k-l] \\
&= \sum_{l=1}^{k-1} P[X=l]\, P[Y=k-l] \ \text{ (indépendance des va } X \text{ et } Y\text{)} \\
&= \sum_{l=1}^{k-1} \left(pq^{l-1}\right)\left(pq^{k-l-1}\right) \\
&= (k-1)p^2q^{k-2}
\end{aligned}$$

Cette loi est appelée loi de Pascal.

4) Pour déterminer $E(Z)$, le plus simple est d'utiliser la linéarité de l'espérance mathématique

$$E(Z) = E(X) + E(Y) \underbrace{=}_{\text{Tables}} \frac{1}{p} + \frac{1}{p} = \frac{2}{p}$$

Pour déterminer $\text{var}(Z)$, on utilise l'indépendance entre les variables X et Y

$$\text{var}(Z) \underbrace{=}_{\text{Indépendance de } X \text{ et } Y} \text{var}(X) + \text{var}(Y) \underbrace{=}_{\text{Tables}} \frac{2q}{p^2}$$

$\boxed{\textbf{Exercice 3}}$

Enoncé

On considère une suite de variables aléatoires indépendantes C_k, $k \in \mathbb{N}$ et on construit une suite de variables aléatoires B_k, $k \in \mathbb{N}$ de la manière suivante

$$\begin{aligned} B_0 &= 0 \\ B_k &= C_k + aB_{k-1}, \qquad \forall k \geq 1 \end{aligned}$$

1) On suppose que

$$\phi_{C_n}(u) = E\left[e^{iuC_n}\right] = \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right), \qquad \forall u \in \mathbb{R}$$

Sans faire aucun calcul, déterminer la loi de C_n.

2) On pose $V_n = (C_1, ..., C_n)^t$. Quelle est la loi du vecteur V_n ?

3) On pose $W_n = (B_1, ..., B_n)^t$. Quelle est la loi du vecteur W_n ? (on pourra montrer que $W_n = AV_n$, où A est une matrice de taille $n \times n$ que l'on déterminera).Expliciter la matrice de covariance de W_n pour $n = 2$ et $n = 3$.

4) On désire étudier la loi limite de B_n.

- Pour $a \in [0, 1[$, montrer que B_n converge en loi vers une loi normale centrée dont on précisera la variance.
- Pour $a = 1$, en utilisant un des théorèmes du cours, montrer que la variable aléatoire $\frac{1}{\sqrt{n}}B_n$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

Réponses

1) $\phi_{C_n}(u)$ est la fonction caractéristique de la variable aléatoire C_n qui, comme son nom l'indique, caractérise la loi de cette variable aléatoire. En observant les tables de lois, on remarque que $\exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)$ est la fonction caractéristique d'une loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$, d'où

$$C_n \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

2) Puisque les variables aléatoires C_k sont indépendantes, la densité du vecteur V_n s'écrit

$$\begin{aligned} p(c_1, ..., c_n) &= \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{c_k^2}{2}\right) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} c_k^2\right) \end{aligned}$$

On sait bien (résultat du cours) que cette densité s'écrit

$$p(c_1, ..., c_n) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det(\Sigma)}} \exp\left[-\frac{1}{2}(c_1, ..., c_n)\Sigma^{-1}(c_1, ..., c_n)^T\right]$$

où $\Sigma = I_n$ est la matrice identité de taille $n \times n$. On en déduit

$$V_n \sim \mathcal{N}_n(0_n, I_n)$$

où 0_n est le vecteur nul de taille $n \times 1$.
3) D'après la définition des variables aléatoires B_n, on a

$$\begin{array}{rcl} B_1 & = & C_1 \\ B_2 & = & C_2 + aB_1 = C_2 + aC_1 \\ B_3 & = & C_3 + aB_2 = C_3 + aC_2 + a^2C_1 \\ & & ... \\ B_n & = & C_n + aC_{n-1} + a^2C_{n-2} + ... + a^{n-1}C_1 \end{array}$$

On peut mettre ces relations sous la forme matricielle

$$\begin{pmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a^{n-1} & a^{n-2} & \dots & a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire $W_n = AV_n$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a^{n-1} & a^{n-2} & \dots & a & 1 \end{pmatrix}$$

Puisque $\det(A) = 1$, la matrice A est de rang n donc

$$W_n \sim \mathcal{N}_n\left(0_n, AI_nA^T\right) = \mathcal{N}_n\left(0_n, AA^T\right)$$

Pour $n = 2$, la matrice de covariance de W_n s'écrit

$$AA^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & a^2+1 \end{pmatrix}$$

tandis que pour $n = 3$, on obtient

$$AA^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ a^2 & a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ a & a^2+1 & a^3+a \\ a^2 & a^3+a & a^4+a^2+1 \end{pmatrix}$$

4)

- Pour $a < 1$, en utilisant la relation

$$\begin{array}{rcl} B_n & = & C_n + aC_{n-1} + a^2C_{n-2} + ... + a^{n-1}C_1 \\ & = & (a^{n-1}, a^{n-2}, ..., a, 1) \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix} \end{array}$$

on peut montrer que B_n suit une loi normale de moyenne nulle et de variance

$$\begin{aligned} \operatorname{var}(B_n) &= 1 + a^2 + a^4 + ... + a^{2n-2} \\ &= \frac{1-a^{2n}}{1-a^2} \end{aligned}$$

Puisque $a < 1$, on a

$$\operatorname{var}(B_n) \underset{n\to\infty}{\to} \frac{1}{1-a^2}$$

Il est donc légitime de se demander si B_n converge en loi vers une loi normale $\mathcal{N}\left(0, \frac{1}{1-a^2}\right)$. Pour le démontrer, on peut utiliser le théorème de Lévy. La fonction caractéristique de B_n s'écrit

$$\phi_{B_n}(u) = E\left[e^{iuB_n}\right] = \exp\left(-\frac{u^2}{2}\frac{1-a^{2n}}{1-a^2}\right)$$

donc

$$\phi_{B_n}(u) \underset{n\to\infty}{\to} \phi(u) = \exp\left(-\frac{u^2}{2}\frac{1}{1-a^2}\right)$$

Mais $\phi(u) = \exp\left(-\frac{u^2}{2}\frac{1}{1-a^2}\right)$ est la fonction caractéristique d'une loi normale de moyenne nulle et de variance $\frac{1}{1-a^2}$ qui est continue en $t = 0$, d'où

$$B_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{1-a^2}\right)$$

- Pour $a = 1$, on a

$$B_n = C_n + C_{n-1} + C_{n-2} + ... + C_1$$

d'où

$$\frac{B_n}{\sqrt{n}} = \frac{C_n + C_{n-1} + C_{n-2} + ... + C_1}{\sqrt{n}}$$

En utilisant le théorème de la limite centrale, on en déduit

$$\frac{B_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$