INP TOULOUSE ENSEEIHT

Examen Jeudi 3 Novembre 2011

Exercice 1

Enoncé

On considère deux variables aléatoires indépendantes X et Y de lois normales $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ et on cherche la loi de la variable aléatoire

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

appelée loi de Rayleigh.

1) Déterminer la loi du couple (R, θ) obtenu à partir de la définition des coordonnées polaires

$$\begin{aligned} X &= R\cos\theta \\ Y &= R\sin\theta \end{aligned}$$

En déduire la loi de R.

2) On remarque que

$$R = \sigma\sqrt{U} \text{ avec } U = \left(\frac{X}{\sigma}\right)^2 + \left(\frac{Y}{\sigma}\right)^2$$

On rappelle que si X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires indépendantes de lois normales $\mathcal{N}(0, 1)$, alors $X_1^2 + X_2^2$ suit une loi du chi2 à deux degrés de liberté, c'est-à-dire,

$$X_1^2 + X_2^2 \sim \chi_2^2.$$

En déduire la loi de U puis retrouver la loi de R déterminée à la question précédente.

3) Une autre manière de déterminer la loi de R est de calculer sa fonction de répartition notée $F(r)$. Exprimer $F(r)$ en fonction d'une intégrale double de la densité du couple (X, Y) notée $f(x, y)$ sur un domaine que l'on précisera. Effectuer le changement de variables des coordonnées polaires dans cette intégrale double et en déduire la densité de R déjà déterminée aux deux questions précédentes.

4) Déterminer $E[R]$ et $\text{var}[R]$.

5) On considère n variables aléatoires $R_1, ..., R_n$ indépendantes suivant la loi de Rayleigh. Déterminer la fonction caractéristique de

$$S = \sum_{k=1}^{n} R_k^2$$

(on pourra poser $U_k = \frac{R_k^2}{\sigma^2}$ et utiliser la question 2) et en déduire que S suit une loi Gamma dont on déterminera les paramètres.

Réponses

1) Comme vu en cours, le changement de variables

$$\left\{ \begin{array}{l} X = R\cos\theta \\ Y = R\sin\theta \end{array} \right.$$

est bijectif de $]0,\infty[\,\times\,[0,2\pi[$ dans $\mathbb{R}^2\backslash\,\{(0,0)\}$. De plus, il est bien connu que

$$R = \sqrt{X^2+Y^2} \text{ et } \theta = \text{Atan}\left(\frac{Y}{X}\right) + k\pi$$

Le jacobien du changement de variables est donc

$$J = \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial X}{\partial R} & \frac{\partial Y}{\partial R} \\ \frac{\partial X}{\partial \theta} & \frac{\partial Y}{\partial \theta} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} \cos\theta & \sin\theta \\ -R\sin\theta & R\cos\theta \end{array} \right| = \boxed{R}$$

Puisque les variables aléatoires X et Y sont indépendantes et de lois normales $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$, la densité du couple (X,Y) s'écrit

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(x,.)f(.,y) \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\left[-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}\right] \end{aligned}$$

On en déduit la densité du couple (R,θ)

$$\boxed{g(r,\theta) = \tfrac{r}{2\pi\sigma^2}\exp\left[-\tfrac{r^2}{2\sigma^2}\right] I_{]0,\infty[\times[0,2\pi[}(r,\theta)}$$

La densité de R s'obtient par intégration de la loi du couple, soit

$$\begin{aligned} g(r,.) &= \int_0^{2\pi} g(r,\theta)d\theta \\ &= \boxed{\tfrac{r}{\sigma^2}\exp\left[-\tfrac{r^2}{2\sigma^2}\right] I_{]0,\infty[}(r)} \end{aligned}$$

2) Si X suit une loi normale $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$, la variable aléatoire centrée réduite $\frac{X}{\sigma}$ suit une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. Il en est de même pour $\frac{Y}{\sigma}$. Puisque X et Y sont des variables aléatoires indépendantes, il en est de même pour $\frac{X}{\sigma}$ et $\frac{Y}{\sigma}$. D'après un résultat du cours, on en déduit que

$$U = \frac{X^2}{\sigma^2} + \frac{Y^2}{\sigma^2} \sim \chi_2^2$$

c'est-a-dire que U suit une loi du chi2 à deux degrés de liberté de densité

$$h(u) = \boxed{\tfrac{1}{2}\exp\left(-\tfrac{u}{2}\right) I_{]0,\infty[}(u)}$$

En faisant le changement de variables $R = \sigma\sqrt{U}$ qui est clairement bijectif de $]0,\infty[$ dans $]0,\infty[$, on obtient la densité de R

$$g(r,.) = \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right)\left|\frac{du}{dr}\right| I_{]0,\infty[}(u)$$

Puisque

$$R = \sigma\sqrt{U} \Leftrightarrow U = \frac{R^2}{\sigma^2}$$

on a

$$\frac{du}{dr} = \frac{2r}{\sigma^2}$$

et donc

$$g(r,.) = \boxed{\frac{r}{\sigma^2} \exp \boxed{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} I_{]0,\infty[}(r)}$$

On retrouve le résultat de la question précédente.
3) La fonction de répartition de la variable aléatoire R est définie par

$$\begin{aligned} F(r) &= P[R < r] \\ &= P\left[X^2 + Y^2 < r^2\right] \end{aligned}$$

Le domaine des couples (X, Y) tels que $X^2 + Y^2 < r^2$ est un disque de centre $(0, 0)$ et de rayon r noté D_r. On a alors Puisque $g(., u) = 0$ si $u < 0$, on a clairement

$$\begin{aligned} F(r) &= \iint_{D_r} f(x, y) dx dy \\ &= \iint_{D_r} \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left[-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\right] dx dy \end{aligned}$$

Le changement de variables des coordonnées polaires donne

$$\begin{aligned} F(r) &= \iint_{]0,r[\times]0,2\pi[} \frac{\rho}{2\pi\sigma^2} \exp\left[-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}\right] d\rho d\theta \\ &= \int_0^r \frac{\rho}{\sigma^2} \exp\left[-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}\right] d\rho \end{aligned}$$

En dérivant cette expression par rapport à r, on retrouve la densité d'une loi de Rayleigh

$$g(r,.) = \boxed{\frac{r}{\sigma^2} \exp \boxed{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} I_{]0,\infty[}(r)}$$

4) La moyenne de R est définie par

$$\begin{aligned} E[R] &= \int_{\mathbb{R}} r g(r,.) dr \\ &= \int_0^\infty \frac{r^2}{\sigma^2} \exp\left[-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right] dr \end{aligned}$$

En faisant une intégration par parties

$$\left\{ \begin{array}{c} u' = \frac{-r}{\sigma} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) \\ v = -r \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} u = \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) \\ v' = -1 \end{array} \right.$$

on obtient

$$\begin{aligned} E[R] &= \left[-r \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right)\right]_0^\infty + \int_0^\infty \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) dr \\ &= 0 + \sqrt{2\pi\sigma^2} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) dr \end{aligned}$$

On reconnait dans la seconde intégrale la densité d'une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ d'où

$$E[R] = \sqrt{2\pi\sigma^2} \times \frac{1}{2} = \boxed{\sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}}$$

La variance de R est définie par

$$\text{var}[R] = E\left[R^2\right] - E[R]^2.$$

Pour déterminer, le moment d'ordre 2 de R, le plus simple est peut-être d'utiliser la relation

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

En effet, on a alors

$$E\left[R^2\right] = E\left[X^2 + Y^2\right] = 2\sigma^2$$

d'où

$$\text{var}[R] = \boxed{\sigma^2\left(2 - \frac{\pi}{2}\right)}$$

5) La fonction caractéristique de S s'écrit

$$\begin{aligned}
\varphi_S(t) &= E\left[\exp\left(itS\right)\right] \\
&= E\left[\exp\left(it\sum_{k=1}^{n} R_k^2\right)\right] \\
&= E\left[\prod_{k=1}^{n} \exp\left(itR_k^2\right)\right]
\end{aligned}$$

Puisque les variables aléatoires $R_1, ..., R_n$ sont indépendantes, il en est de même pour les variables aléatoires $\exp\left(itR_1^2\right)$,...,$\exp\left(itR_n^2\right)$, d'où

$$\varphi_S(t) = \prod_{k=1}^{n} E\left[\exp\left(itR_k^2\right)\right]$$

En utilisant la question 2, on pose $U_k = \frac{R_k^2}{\sigma^2}$ qui suit une loi du chi2 à deux degrés de liberté, et on obtient

$$\begin{aligned}
\varphi_S(t) &= \prod_{k=1}^{n} E\left[\exp\left(it\sigma^2 U_k\right)\right] \\
&= \prod_{k=1}^{n} \varphi_{U_k}(t\sigma^2)
\end{aligned}$$

En cherchant dans les tables la fonction caractéristique d'une loi du chi2, on en déduit

$$\begin{aligned}
\varphi_S(t) &= \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - 2it\sigma^2} \\
&= \frac{1}{\left(1 - 2it\sigma^2\right)^n}
\end{aligned}$$

qui est la fonction caractéristique d'une loi gamma $\Gamma\left(\frac{1}{2\sigma^2}, n\right)$. On en déduit

$$\boxed{S \sim \Gamma\left(\frac{1}{2\sigma^2}, n\right)}$$

Exercice 2

Enoncé

On considère un vecteur Gaussien $\mathbf{X}$ de $\mathbb{R}^4$ de moyenne $\boldsymbol{\mu} = (1,2,3,4)^T$ et de matrice de covariance $\mathbf{M}$ telle que

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0}_2 \\ \mathbf{0}_2 & \mathbf{B} \end{pmatrix} \text{ avec } \mathbf{0}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

1) Déterminer les lois marginales des couples (X_1, X_2),(X_1, X_3) et (X_1, X_4). Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont elles indépendantes ? Même question pour les variables X_1 et X_3 puis pour les variables X_1 et X_4.
2) Soient a et b deux réels non nuls.

- Quelle est la loi de $U = a\sum_{i=1}^{4} X_i$?
- Déterminer la loi du couple $(V, W)^T$ avec

$$V = a\left(X_1 + X_2\right) \text{ et } W = b\left(X_3 + X_4\right).$$

  Les variables aléatoires V et W sont-elles indépendantes ?

Réponses

1) On sait que les lois marginales d'un vecteur Gaussien sont Gaussiennes donc toutes les lois des couples (X_1, X_2),(X_1, X_3) et (X_1, X_4) sont des lois normales à deux dimensions. Pour les caractériser, il suffit de déterminer leurs moyennes (à partir de $\boldsymbol{\mu}$) et leurs variances et covariances à partir de $\mathbf{M}$. On obtient alors

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} &\sim \mathcal{N}_2\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right), \begin{pmatrix} X_1 \\ X_3 \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}_2\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\right) \\ \begin{pmatrix} X_1 \\ X_4 \end{pmatrix} &\sim \mathcal{N}_2\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

Puisque $\text{cov}(X_1, X_2) = 2 \neq 0$, les variables aléatoires X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes. Puisque $\text{cov}(X_1, X_3) = 0$ et que (X_1, X_3) est un vecteur Gaussien, les variables X_1 et X_3 sont indépendantes. De la même façon, les variables X_1 et X_4 sont indépendantes.
2)

- On a

$$U = (a, a, a, a)\mathbf{X}$$

Comme $\mathbf{X}$ est un vecteur Gaussien et que le rang de la matrice $[a, a, a, a]$ est 1 (car $a \neq 0$), on sait que U suit une loi normale. La moyenne de U est

$$E[U] = (a, a, a, a)E[\mathbf{X}] = 10a$$

La variance de U est

$$\begin{aligned} \text{var}[U] &= (a, a, a, a)\mathbf{M}(a, a, a, a)^T \\ &= (a, a, a, a)\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0}_2 \\ \mathbf{0}_2 & \mathbf{B} \end{pmatrix}(a, a, a, a)^T \\ &= (a, a, a, a)(3a, 3a, 5a, 5a)^T \\ &= 16a^2 \end{aligned}$$

Donc

$$U \sim \mathcal{N}(10a, 16a^2)$$

- Le vecteur (V, W) est obtenu par transformation affine de $\mathbf{X}$ puisque

$$\begin{pmatrix} V \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & b \end{pmatrix}\mathbf{X} = \mathbf{CX} \text{ avec } \mathbf{C} = \begin{pmatrix} a & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & b \end{pmatrix}$$

Puisque a et b sont tous deux non nuls, la matrice $\mathbf{C}$ est de rang 2 donc on peut utiliser le résultat du cours

$$\begin{pmatrix} V \\ W \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}_2(\mathbf{C}\boldsymbol{\mu}, \mathbf{CMC}^T)$$

Des calculs élémentaires permettent d'obtenir

$$\mathbf{C}\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} a & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & b \end{pmatrix}(1, 2, 3, 4)^T = \begin{pmatrix} 3a \\ 7b \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{aligned} \mathbf{CMC}^T &= \begin{pmatrix} a & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0}_2 \\ \mathbf{0}_2 & \mathbf{B} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & b \end{pmatrix}^T \\ &= \begin{pmatrix} a & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3a & 0 \\ 3a & 0 \\ 0 & 5b \\ 0 & 5b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6a^2 & 0 \\ 0 & 10b^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{pmatrix} V \\ W \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}_2\left(\begin{pmatrix} 3a \\ 7b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6a^2 & 0 \\ 0 & 10b^2 \end{pmatrix}\right)$$

- Puisque (V, W) est un vecteur Gaussien et que $\text{cov}(V, W) = 0$, les variables aléatoires V et W sont indépendantes.

Exercice 3

Enoncé

On considère une variable aléatoire discrète **uniforme** X à valeurs dans $\{-2, +2\}$ (i.e., $P[X=-2] = P[X=2] = 1/2$) et une variable aléatoire binaire Y telle que

$$P[Y=1] = p \text{ et } P[Y=0] = q = 1-p$$

avec $p \in]0,1[$. On suppose de plus que X et Y sont des variables aléatoires indépendantes.
1) Quelle est la loi de la variable aléatoire $U = XY$? Déterminer $E(U)$ et $\text{Var}(U)$.
2) Quelle est la loi de la variable aléatoire $V = X^2Y^2$? Déterminer $E(V)$ et $\text{Var}(V)$.
3) Déterminer la loi du couple (U,V). Déterminer la covariance de ce couple notée $\text{cov}(U,V)$. Les variables aléatoires U et V sont-elles indépendantes ? Commenter ces deux derniers résultats.

Réponses

1) Il est clair que la variable aléatoire U prend ses valeurs dans l'ensemble $\{-2,0,2\}$ avec

$$\begin{aligned}
P[U=0] &= P[Y=0] = q \\
P[U=-2] &= P[Y=1 \text{ et } X=-2] \underbrace{=}_{X \text{ et } Y \text{ indépendantes}} P[Y=1] \times P[X=-2] = \frac{p}{2} \\
P[U=2] &= P[Y=1 \text{ et } X=2] \underbrace{=}_{X \text{ et } Y \text{ indépendantes}} P[Y=1] \times P[X=2] = \frac{p}{2}
\end{aligned}$$

On vérifie que

$$P[U=0] + P[U=-2] + P[U=2] = q + \frac{p}{2} + \frac{p}{2} = q + p = 1$$

La moyenne de U est

$$E(U) = 0 \times q + (-2) \times \frac{p}{2} + 2 \times \frac{p}{2} = 0$$

De même

$$E\left(U^2\right) = 0^2 \times q + (-2)^2 \times \frac{p}{2} + 2^2 \times \frac{p}{2} = 4p$$

d'où

$$\text{var}(U) = E\left(U^2\right) - E^2(U) = 4p$$

2) Puisque X est à valeurs dans $\{-2,2\}$, on a $X^2 = 4$. De plus, puisque Y est à valeurs dans $\{0,1\}$, on a $Y^2 = Y$. On en déduit

$$V = X^2Y^2 = 4Y$$

La variable aléatoire V est donc à valeurs dans $\{0,4\}$ avec

$$\begin{aligned}
P[V=0] &= p \\
P[V=4] &= q
\end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned}
E[V] &= 4E[Y] = 4p \\
\text{var}[V] &= 16\text{var}[Y] = 16pq
\end{aligned}$$

3) En énumérant les valeurs possibles des variables X et Y et en utilisant le fait que $U = XY$ et $V = X^2Y^2 = 4Y$, on s'aperçoit que le couple (U, V) prend ses valeurs dans l'ensemble

$$\{(0,0)\,, (-2,4), (2,4)\}$$

avec les probabilités suivantes

$$\begin{aligned} P\left[(U,V) = (0,0)\right] &= P\left[Y = 0\right] = q \\ P\left[(U,V) = (-2,4)\right] &= P\left[X = -2 \text{ et } Y = 1\right] = \frac{p}{2} \\ P\left[(U,V) = (2,4)\right] &= P\left[X = 2 \text{ et } Y = 1\right] = \frac{p}{2} \end{aligned}$$

On vérifie que

$$P\left[(U,V) = (0,0)\right] + P\left[(U,V) = (-2,4)\right] + P\left[(U,V) = (2,4)\right] = 1$$

On en déduit

$$E\left[UV\right] = 0 \times q + (-8) \times \frac{p}{2} + 8 \times \frac{p}{2} = 0$$

d'où

$$\operatorname{cov}(U,V) = E\left[UV\right] - E\left[U\right]E\left[V\right] = 0$$

Les variables U et V ne sont pas indépendantes car $V = U^2$ et pourtant la covariance entre ces deux variables est nulle. Ceci illustre le fait que "covariance nulle" n'implique généralement pas "indépendance".