Examen Mardi 23 Octobre 2012

Exercice 1

Enoncé

On considère un couple de variables aléatoires discrètes (X, Y) défini comme suit

$$\begin{aligned}
P[(X,Y)=(0,0)] &= \frac{8}{32}=\frac{1}{4} \\
P[(X,Y)=(-1,-1)] &= P[(X,Y)=(1,-1)]=P[(X,Y)=(1,0)]=P[(X,Y)=(0,1)]=\frac{3}{32} \\
P[(X,Y)=(0,-1)] &= P[(X,Y)=(-1,0)]=\frac{5}{32} \\
P[(X,Y)=(-1,1)] &= P[(X,Y)=(1,1)]=\frac{1}{32}
\end{aligned}$$

1) Déterminer les lois marginales de X et de Y. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

2) Déterminer la covariance du couple (X, Y) notée $\text{cov}(X, Y)$. Peut-on retrouver le résultat de la question 1) avec la valeur de $\text{cov}(X, Y)$?

3) Déterminer la loi du couple (Z, T) avec $Z = X^2$ et $T = Y^2$ puis les lois marginales de Z et T. Les variables aléatoires Z et T sont-elles indépendantes ?

4) Que pensez vous de l'affirmation "deux variables aléatoires discrètes X et Y sont indépendantes si et seulement si X^2 et Y^2 sont indépendantes ?

Réponses

1) X est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\{-1, 0, 1\}$ avec

$$\begin{aligned}
P[X=-1] &= P[(X,Y)=(-1,-1)]+P[(X,Y)=(-1,0)]+P[(X,Y)=(-1,1)]=\frac{9}{32} \\
P[X=1] &= P[(X,Y)=(1,-1)]+P[(X,Y)=(1,0)]+P[(X,Y)=(1,1)]=\frac{7}{32} \\
P[X=0] &= P[(X,Y)=(0,0)]+P[(X,Y)=(0,1)]+P[(X,Y)=(0,-1)]=\frac{16}{32}=\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

De même, Y est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\{-1, 0, 1\}$ avec

$$\begin{aligned}
P[Y=-1] &= P[(X,Y)=(-1,-1)]+P[(X,Y)=(1,-1)]+P[(X,Y)=(0,-1)]=\frac{11}{32} \\
P[Y=1] &= P[(X,Y)=(-1,1)]+P[(X,Y)=(0,1)]+P[(X,Y)=(1,1)]=\frac{5}{32} \\
P[Y=0] &= P[(X,Y)=(-1,0)]+P[(X,Y)=(1,0)]+P[(X,Y)=(0,0)]=\frac{16}{32}=\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Il est assez facile de voir que X et Y ne sont pas des variables aléatoires indépendantes. Par exemple

$$P[(X,Y)=(0,1)]=\frac{3}{32}\neq P[X=0]\,P[Y=1]=\frac{1}{2}\times\frac{5}{32}$$

2) La covariance du couple (X,Y) est définie par

$$\operatorname{cov}(X,Y)=E[XY]-E[X]\,E[Y]$$

avec

$$\begin{aligned}
E[X] &= (-1)\times\frac{9}{32}+1\times\frac{7}{32}+0\times\frac{1}{2}=\frac{-1}{16}\\
E[Y] &= (-1)\times\frac{11}{32}+1\times\frac{5}{32}+0\times\frac{1}{2}=\frac{-3}{16}\\
E[XY] &= (-1)\times\left[\frac{3}{32}+\frac{1}{32}\right]+1\times\left[\frac{3}{32}+\frac{1}{32}\right]=0
\end{aligned}$$

Donc

$$\operatorname{cov}(X,Y)=-\frac{3}{256}.$$

Puisque $\operatorname{cov}(X,Y)\neq 0$, on en déduit que les variables X et Y ne sont pas indépendantes et on retrouve le résultat de la question précédente.
3) En observant la loi du couple (X,Y), on voit que (Z,T) est un couple de variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$ avec

$$\begin{aligned}
P[(Z,T)=(0,0)] &= P[(X,Y)=(0,0)]=\frac{8}{32}=\frac{1}{4}\\
P[(Z,T)=(0,1)] &= P[(X,Y)=(0,1)]+P[(X,Y)=(0,-1)]=\frac{3}{32}+\frac{5}{32}=\frac{1}{4}\\
P[(Z,T)=(1,0)] &= P[(X,Y)=(1,0)]+P[(X,Y)=(-1,0)]=\frac{3}{32}+\frac{5}{32}=\frac{1}{4}\\
P[(Z,T)=(1,1)] &= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

donc le couple (Z,T) est uniforme dans l'ensemble $\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$.

En observant les lois marginales de X et Y, on peut déterminer les lois de Z et T qui sont toutes deux à valeurs dans $\{0,1\}$ avec

$$\begin{aligned}
P[Z=0] &= P[X=0]=\frac{1}{2}\\
P[Z=1] &= P[X=1]+P[X=-1]=\frac{7}{32}+\frac{9}{32}=\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
P[T=0] &= P[Y=0]=\frac{1}{2}\\
P[T=1] &= P[Y=1]+P[Y=-1]=\frac{5}{32}+\frac{11}{32}=\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

En d'autres termes, Z et T sont des variables aléatoires discrètes uniformes dans $\{0,1\}$. On remarque que

$$P\left[(Z,T)=(z_i,t_j)\right]=\frac{1}{4}=P\left[Z=z_i\right]P\left[T=t_j\right]$$

pour tout couple (z_i,t_j). Les variables aléatoires Z et T sont donc indépendantes.
4) Cette affirmation n'est pas correcte; Plus précisément, si X et Y sont des variables aléatoires discrètes indépendantes, alors X^2 et Y^2 sont aussi indépendantes; La réciproque est fausse comme le montre cet exercice.

Exercice 2

Enoncé

On considère un couple de variables aléatoires continues (X,Y) de densité

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{4}(1+xy) \text{ si } |x|<1 \text{ et } |y|<1\\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$$

1) Quelles sont les lois marginales de X et de Y ? Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
2) Déterminer la covariance du couple (X,Y) notée $\mathrm{cov}(X,Y)$. Peut-on retrouver le résultat de la question 1) avec la valeur de $\mathrm{cov}(X,Y)$?
3) On voudrait déterminer la loi du couple (Z,T) avec $Z=X^2$ et $T=Y^2$. Montrer que ce changement de variables définit quatre bijections que l'on précisera. En déduire la loi du couple (Z,T) puis les lois marginales de Z et T. Les variables aléatoires Z et T sont-elles indépendantes ?
4) Que pensez vous de l'affirmation "deux variables aléatoires continues X et Y sont indépendantes si et seulement si X^2 et Y^2 sont indépendantes ?

Réponses

1) X et Y sont des variables aléatoires continues de densités

$$f(x,.)=\int_{\mathbb{R}}f(x,y)dy \text{ et } f(.,y)=\int_{\mathbb{R}}f(x,y)dx$$

Comme le domaine de $f(x,y)$ est $[-1,+1]\times[-1,+1]$, on obtient

$$f(x,.)=\begin{cases}\int_{-1}^{+1}\frac{1}{4}(1+xy)\,dy \text{ si } x\in[-1,+1]\\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$$

Des calculs élémentaires conduisent à

$$\int_{-1}^{+1}\frac{1}{4}(1+xy)\,dy=\frac{1}{4}\left[y+x\frac{y^2}{2}\right]_{-1}^{+1}=\frac{1}{2}$$

Donc X suit la loi uniforme sur l'intervalle $[-1,+1]$. Par symétrie, il en est de même pour Y. Les variables X et Y ne sont pas indépendantes car pour $(x,y)\in[-1,+1]\times[-1,+1]$

$$f(x,y)=\frac{1}{4}(1+xy)\,dy\neq f(x,.)f(.,y)=\frac{1}{4}$$

2)La covariance du couple (X, Y) est définie par

$$\operatorname{cov}(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y]$$

avec

$$\begin{aligned} E[X] &= E[Y] = 0 \text{ (voir tables de la loi uniforme)} \\ E[XY] &= \int\int_{\mathbb{R}^2} xyf(x,y)dxdy \end{aligned}$$

Des calculs élémentaires conduisent à

$$\begin{aligned} \int\int_{\mathbb{R}^2} xyf(x,y)dxdy &= \int\int_{[-1,+1]\times[-1,+1]} \frac{xy}{4}(1+xy)\,dxdy \\ &= \underbrace{0}_{\text{Intégrale d'une fonction impaire}} + \frac{1}{4}\left(\int_{[-1,+1]} x^2dx\right)\left(\int_{[-1,+1]} y^2dy\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(2\times\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} \end{aligned}$$

Puisque $\operatorname{cov}(X, Y) \neq 0$, on en déduit que les variables X et Y ne sont pas indépendantes et on retrouve le résultat de la question précédente.

3) On sait que

$$\begin{aligned} Z &= X^2 \Leftrightarrow X = \pm\sqrt{Z} \\ T &= Y^2 \Leftrightarrow Y = \pm\sqrt{T} \end{aligned}$$

On a donc quatre bijections

- la première

$$g_1 \begin{array}{ccc} [0,1]\times[0,1] & \rightarrow & [0,1]\times[0,1] \\ (x,y) & \longmapsto & (z,t) = (x^2,y^2) \end{array} \quad \text{avec } g_1^{-1}(z,t) = \left(\sqrt{z}, \sqrt{t}\right)$$

  qui admet la matrice Jacobienne

$$J_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{z}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{t}} \end{pmatrix} \text{ avec } |\det(J_1)| = \frac{1}{4\sqrt{zt}}$$

  et mène à une densité

$$q_1(z,t) = \frac{1}{16}\left(\frac{1}{\sqrt{zt}} + 1\right)$$

- la seconde

$$g_2 \begin{array}{ccc} [0,1]\times[-1,0] & \rightarrow & [0,1]\times[0,1] \\ (x,y) & \longmapsto & (z,t) = (x^2,y^2) \end{array} \quad \text{avec } g_2^{-1}(z,t) = \left(\sqrt{z}, -\sqrt{t}\right)$$

  qui admet la matrice Jacobienne

$$J_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{z}} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2\sqrt{t}} \end{pmatrix} \text{ avec } |\det(J_2)| = \frac{1}{4\sqrt{zt}}$$

et mène à une densité

$$q_2(z,t) = \frac{1}{16}\left(\frac{1}{\sqrt{zt}} - 1\right)$$

- la troisième

$$g_3 \begin{array}{ccc} [-1,0]\times[0,1] & \to & [0,1]\times[0,1] \\ (x,y) & \longmapsto & (z,t)=(x^2,y^2) \end{array} \quad \text{avec } g_3^{-1}(z,t) = \left(-\sqrt{z}, \sqrt{t}\right)$$

qui admet la matrice Jacobienne

$$J_3 = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2\sqrt{z}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{t}} \end{pmatrix} \text{ avec } |\det(J_3)| = \frac{1}{4\sqrt{zt}}$$

et mène à une densité

$$q_3(z,t) = \frac{1}{16}\left(\frac{1}{\sqrt{zt}} - 1\right)$$

- la quatrième

$$g_4 \begin{array}{ccc} [-1,0]\times[-1,0] & \to & [0,1]\times[0,1] \\ (x,y) & \longmapsto & (z,t)=(x^2,y^2) \end{array} \quad \text{avec } g_4^{-1}(z,t) = \left(-\sqrt{z}, -\sqrt{t}\right)$$

qui admet la matrice Jacobienne

$$J_4 = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2\sqrt{z}} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2\sqrt{t}} \end{pmatrix} \text{ avec } |\det(J_4)| = \frac{1}{4\sqrt{zt}}$$

et mène à une densité

$$q_4(z,t) = \frac{1}{16}\left(\frac{1}{\sqrt{zt}} + 1\right)$$

On en déduit que le couple (Z,T) est à valeur dans $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ et admet la densité

$$q(z,t) = \sum_{i=1}^{4} q_i(z,t) = \begin{cases} \frac{1}{4\sqrt{zt}} \text{ si } (z,t) \in [0,1]\times[0,1] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}.$$

On remarquera que

$$\int\int_{[0,1]\times[0,1]} q(z,t)dzdt = \left(\int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{z}}dz\right)\left(\int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{t}}dt\right) = 1.$$

La densité de Z s'obtient par intégration de la densité jointe $q(z,t)$. On obtient

$$q(z,.) = \int q(z,t)dt = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{z}} \text{ si } z \in [0,1] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}.$$

De même

$$q(.,t) = \int q(z,t)dz = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{t}} \text{ si } t \in [0,1] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

On peut donc observer que $q(z,t) = q(z,.)q(.,t)$ pour tout couple (z,t). Les variables aléatoires Z et T sont donc indépendantes.
4)Cette affirmation n'est pas correcte; Plus précisément, si X et Y sont des variables aléatoires continues indépendantes, alors X^2 et Y^2 sont aussi indépendantes; La réciproque est fausse comme le montre cet exercice.

Exercice 3

Enoncé
Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes de même loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. On pose

$$Y_1 = \frac{1}{2}(X_1 + X_2) \text{ et } Y_2 = \frac{1}{2}(X_1 - X_2)$$

1) Déterminer les lois des vecteurs (X_1, X_2) et (Y_1, Y_2). Les variables aléatoires Y_1 et Y_2 sont-elles indépendantes ? (prenez soin de justifier vos réponses).
2) On pose

$$\overline{X} = \frac{1}{2}(X_1 + X_2) \text{ et } S^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$$

- Exprimer $\overline{X}$ et S^2 en fonction de Y_1 et Y_2.
- Les variables aléatoires $\overline{X}$ et S^2 sont-elles indépendantes ?
- Déterminer les lois de $\overline{X}$ et S^2.

Réponses
1) Comme X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires indépendantes de même loi normale $\mathcal{N}(0,1)$, la densité du couple (X_1, X_2) est

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x_1^2}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x_2^2}{2}\right)$$

qui la densité d'"une loi normale à deux dimensions de vecteur moyenne $\mathbf{m}$ et de matrice de covariance Σ avec

$$\mathbf{m} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le changement de variables permettant de passer de (X_1, X_2) à (Y_1, Y_2) est affine puisque

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de la matrice $\mathbf{A}$ est

$$\det(\mathbf{A}) = -\frac{1}{2} \neq 0$$

donc la matrice $\mathbf{A}$ est de rang 2, ce qui permet d'appliquer le résultat du cours

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\mathbf{Am}, \mathbf{A}\Sigma\mathbf{A}^T\right)$$

c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{AA}^T\right)$$

avec

$$\mathbf{AA}^T = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Comme $(Y_1, Y_2)^T$ est un vecteur Gaussien et que $\mathrm{cov}(Y_1, Y_2) = 0$, on en déduit que Y_1 et Y_2 sont des variables aléatoires indépendantes.
2)

- On a

$$\begin{cases} Y_1 = \frac{1}{2}(X_1 + X_2) \\ Y_2 = \frac{1}{2}(X_1 - X_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X_1 = Y_1 + Y_2 \\ X_2 = Y_1 - Y_2 \end{cases}$$

  Donc

$$\overline{X} = \frac{1}{2}(X_1 + X_2) = Y_1$$

  et

$$\begin{aligned} 2S^2 &= \sum_{i=1}^{2} \left(X_i - \overline{X}\right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{2} \left(X_i^2 - 2X_i\overline{X} + \overline{X}^2\right) \\ &= \sum_{i=1}^{2} X_i^2 - 2\overline{X}\left(2\overline{X}\right) + 2\overline{X}^2 \\ &= (Y_1 + Y_2)^2 + (Y_1 - Y_2)^2 - 2Y_1^2 \\ &= 2Y_2^2 \end{aligned}$$

  d'où

$$\overline{X} = Y_1 \text{ et } S^2 = Y_2^2.$$

- Puisque Y_1 et Y_2 sont des variables aléatoires indépendantes et $\left(\overline{X}, S^2\right) = (Y_1, Y_2^2)$, on en déduit que $\overline{X}$ et S^2 sont des variables aléatoires indépendantes.

- La loi de Y_1 est triviale à trouver puisqu'on connait celle de (Y_1, Y_2) et qu'on sait que toutes les lois marginales d'un vecteur Gaussien sont Gaussiennes. On en déduit

$$\overline{X} = Y_1 \sim \mathcal{N}\left(0, 1/2\right).$$

De plus, on a

$$S^2 = Y_2^2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}Y_2\right)^2$$

Comme $U = \sqrt{2}Y_2 \sim \mathcal{N}\left(0, 1\right)$, $2S^2 = U^2$ suit une loi du χ_1^2.