Examen Mercredi 23 Octobre 2013

Exercice 1

Enoncé

On considère un couple de variables aléatoires continues (X, Y) de densité

$$f(x,y) = \begin{cases} c \text{ si } x > 0, y > 0 \text{ et } x + y < 1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

avec $c > 0$.

1) Déterminer la constante c pour que f définisse une densité de probabilité.
2) Déterminer les lois marginales de X et de Y. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
3) Déterminer la moyenne $E[X]$ et la variance var$[X]$ de la variable aléatoire X.
4) Soit $y \in]0,1[$. Déterminer la densité de la loi conditionnelle de $X|\,Y = y$. Représenter graphiquement cette densité et déterminer sa moyenne notée $E[X|\,Y = y]$.
5) Déterminer le coefficient de corrélation du couple (X, Y).
6) Déterminer la loi du couple (Z, T) avec $Z = X$ et $T = X + Y$.

Réponses

1) Pour que f définisse une densité de probabilité, il faut

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy = 1.$$

Si Δ est le domaine défini par $x > 0, y > 0$ et $x + y < 1$, on en déduit

$$\iint_{\Delta} cdxdy = 1 \text{ soit } c = \left(\iint_{\Delta} dxdy\right)^{-1}.$$

Mais $\iint_{\Delta} dxdy$ est l'aire de Δ, d'où

$$c = 2.$$

Pour ceux qui préfèrent les calculs

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} cdy\right) dx = 1 \text{ d'où } c = 2.$$

2) X et Y sont des variables aléatoires continues de densités

$$f(x,.) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)dy \text{ et } f(.,y) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)dx.$$

En analysant le domaine de $f(x,y)$, il est clair que $f(x,.)=0$ si $x \notin [0,1]$. De plus, pour $x \in [0,1]$, on a

$$f(x,.) = \int_0^{1-x} 2dy = 2(1-x).$$

La loi marginale de X est donc définie par

$$f(x,.) = \begin{cases} 2(1-x) \text{ si } x \in [0,1] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}.$$

De manière similaire, on montre que la loi marginale de Y est de densité

$$f(.,y) = \begin{cases} 2(1-y) \text{ si } y \in [0,1] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}.$$

Les variables X et Y ne sont pas indépendantes car pour $x>0, y>0$ et $x+y<1$, on a

$$f(x,y) = 2 \neq f(x,.)f(.,y) = 4(1-x)(1-y).$$

3) La moyenne et la variance de X se calculent de manière élémentaire comme suit

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{\mathbb{R}} x f(x,.)dx = \int_0^1 2x(1-x)dx = \frac{1}{3}. \\ E\left[X^2\right] &= \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x,.)dx = \int_0^1 2x^2(1-x)dx = \frac{1}{6}. \\ \text{var}[X] &= E\left[X^2\right] - E^2[X] = \frac{1}{6} - \frac{1}{9} = \frac{1}{18}. \end{aligned}$$

4) La loi conditionnelle de $X|\,Y=y$ est de densité

$$f(x|\,y) = \frac{f(x,y)}{f(.,y)}.$$

En regardant le domaine de $f(x,y)$, on en déduit que

$$f(x|\,y) = 0 \text{ si } x \notin [0, 1-y].$$

De plus, pour $x \in [0,1-y]$, on a

$$f(x|\,y) = \frac{2}{2(1-y)} = \frac{1}{1-y}$$

d'où finalement

$$f(x|\,y) = \begin{cases} \frac{1}{1-y} \text{ si } x \in [0,1-y] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}.$$

La loi conditionnelle de $X|\,Y=y$ est donc la loi uniforme sur l'intervalle $[0,1-y]$. La moyene de $X|\,Y=y$ est définie par

$$E[X|\,Y=y] = \int_0^{1-y} \frac{x}{1-y}dx = \frac{1-y}{2}.$$

5) Le coefficient de corrélation du couple (X,Y) est défini par

$$\rho = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{\operatorname{var}(X)\operatorname{var}(Y)}} = \frac{E[XY]-E[X]\,E[Y]}{\sqrt{\operatorname{var}(X)\operatorname{var}(Y)}}$$

On sait d'après ce qui précède que

$$E[X] = E[Y] = \frac{1}{3} \text{ et } \operatorname{var}(X) = \operatorname{var}(Y) = \frac{1}{18}.$$

De plus

$$\begin{aligned} E[XY] &= \int\int_{\mathbb{R}^2} xyf(x,y)dxdy \\ &= 2\int_0^1 x\left(\int_0^{1-x} ydy\right)dx \\ &= \int_0^1 x(1-x)^2\,dx = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

On en déduit

$$\rho = -\frac{1}{2}.$$

6) Le changement de variables est tel que

$$\left\{\begin{array}{c} Z = X \\ T = X+Y \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} X = Z \\ Y = T-Z \end{array}\right.$$

et donc il définit une bijection de l'ensemble $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 |\, x>0, y>0 \text{ et } x+y<1\}$ dans un ensemble Δ à déterminer. Pour déterminer Δ, il suffit de résoudre le système

$$\left\{\begin{array}{c} x>0 \\ y>0 \\ x+y<1 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z>0 \\ t>z \\ t<1 \end{array}\right.$$

d'où

$$\Delta = \left\{(z,t)\in\mathbb{R}^2 \middle|\, z>0, t>z \text{ et } t<1\right\}$$

La matrice Jacobienne de ce changement de variables est

$$J = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ avec } |\det(J)| = 1.$$

d'où la densité du couple (Z,T)

$$g(z,t) = \left\{\begin{array}{c} 2 \text{ si } (z,t)\in\Delta \\ 0 \text{ sinon} \end{array}\right. .$$

Exercice 2

Enoncé

On considère deux variables aléatoires X et Y de lois de Bernoulli définies comme suit

$$\begin{aligned} P[X=1] &= p, P[X=0]=1-p, P[Y=1]=p, P[Y=0]=1-p \\ P[(X,Y)=(1,1)] &= P[(X,Y)=(0,0)]=r \end{aligned}$$

avec $0<r<p\leq \frac{1}{2}$.

1) Déterminer la covariance du couple (X,Y) noté $\text{cov}(X,Y)$.

2) En utilisant le fait que l'événement "$X=0$" est la réunion des deux événements "$X=0,Y=0$" et "$X=0,Y=1$", déterminer

$$P_{01}=P[X=0,Y=1].$$

De manière similaire, déterminer P_{01} en utilisant le fait que l'événement "$Y=1$" est la réunion des deux événements "$X=0,Y=1$" et "$X=1,Y=1$". En déduire la valeur de p.

3) En s'inspirant du résultat de la question 2), déterminer

$$P_{10}=P[X=1,Y=0].$$

En déduire la loi du couple (X,Y).

4) Déterminer la loi de la variable aléatoire $Z=X-Y$.

Réponses

1) La covariance du couple (X,Y) est définie par

$$\text{cov}(X,Y)=E[XY]-E[X]E[Y].$$

On sait que $E[X]=E[Y]=p$ (moyenne d'une loi de Bernoulli). De plus

$$E[XY]=\sum_{x_i,y_j} x_i y_j P[X=x_i,Y=y_j]=P[X=1,Y=1]=r$$

d'où

$$\text{cov}(X,Y)=r-p^2.$$

2) En utilisant le fait que l'événement "$X=0$" est la réunion des deux événements "$X=0,Y=0$" et "$X=0,Y=1$", on a

$$\begin{aligned} P[X=0] &= P[X=0,Y=0]+P[X=0,Y=1] \\ &= P_{00}+P_{01} \\ &= r+P_{01} \end{aligned}$$

d'où

$$P_{01}=1-p-r$$

De même

$$\begin{aligned} P[Y=1] &= P[X=0,Y=1]+P[X=1,Y=1] \\ &= P_{01}+P_{11} \\ &= P_{01}+r \end{aligned}$$

d'où

$$P_{01} = p - r.$$

En égalant les deux expressions de P_{01} obtenues, on a

$$1 - p - r = p - r$$

et donc

$$p = \frac{1}{2} \text{ et } P_{01} = \frac{1}{2} - r.$$

3) Pour déterminer P_{10}, on peut écrire

$$\begin{aligned} P[Y=0] &= P[X=0, Y=0] + P[X=1, Y=0] \\ &= P_{00} + P_{10} \\ &= r + P_{10} \end{aligned}$$

d'où

$$P_{10} = 1 - p - r = \frac{1}{2} - r.$$

La loi du couple (X, Y) est donc définie par

$$\begin{aligned} P[(X,Y) = (0,0)] &= P_{00} = r \\ P[(X,Y) = (0,1)] &= P_{01} = \frac{1}{2} - r \\ P[(X,Y) = (1,0)] &= P_{10} = \frac{1}{2} - r \\ P[(X,Y) = (1,1)] &= P_{11} = r \end{aligned}$$

4) Il est clair que la variable $Z = X - Y$ prend ses valeurs dans $\{-1, 0, 1\}$ avec

$$\begin{aligned} P[Z=0] &= P_{00} + P_{11} = 2r \\ P[Z=-1] &= P[(X,Y) = (0,1)] = \frac{1}{2} - r \\ P[Z=1] &= P[(X,Y) = (1,0)] = \frac{1}{2} - r \end{aligned}$$

Exercice 3

Enoncé

On considère un vecteur gaussien $\mathbf{V} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$ de vecteur moyenne $\mathbf{m}$ et de matrice de covariance Σ avec

$$\mathbf{m} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & r \\ r & 1 \end{pmatrix}$$

1) Quelle condition doit vérifier r pour Σ soit une matrice symétrique définie positive ? On supposera que cette condition est vérifiée dans la suite de cet exercice.
2) Déterminer la loi du couple (Z, T) avec $Z = X - Y$ et $T = X + Y$ puis la loi de Z. Les variables Z et T sont-elles indépendantes ? (justifier votre réponse avec soin).
3) Montrer que la loi conditionnelle de X sachant $Y = y$ est une loi normale dont on précisera les paramètres.

Réponses

1) Pour que Σ soit une matrice symétrique définie positive, il faut et il suffit que ses valeurs propres soient strictement positives. Or

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & r \\ r & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - r^2 = (1-\lambda-r)(1-\lambda+r).$$

Les deux valeurs propres de Σ sont donc $\lambda = 1 - r$ et $\lambda = 1 + r$. On en déduit les conditions

$$1 - r > 0 \text{ et } 1 + r > 0 \text{ d'où } r \in \left]-1, 1\right[.$$

2) Le changement de variables permettant de passer de (X, Y) à (Z, T) est affine puisque

$$\begin{pmatrix} Z \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de la matrice $\mathbf{A}$ est

$$\det(\mathbf{A}) = -\mathbf{2} \neq 0$$

donc la matrice $\mathbf{A}$ est de rang 2, ce qui permet d'appliquer le résultat du cours

$$\begin{pmatrix} Z \\ T \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\mathbf{Am}, \mathbf{A}\Sigma\mathbf{A}^T\right).$$

Puisque

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\Sigma\mathbf{A}^T &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & r \\ r & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-r & 1+r \\ r-1 & r+1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2(1-r) & 0 \\ 1 & 2(1+r) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

on a

$$\begin{pmatrix} Z \\ T \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2(1-r) & 0 \\ 1 & 2(1+r) \end{pmatrix}\right).$$

Comme $(Z,T)^T$ est un vecteur Gaussien et que $\mathrm{cov}(Z,T)=0$, on en déduit d'après un résultat du cours que Z et T sont des variables aléatoires indépendantes. De plus la loi marginale de Z est la loi normale $\mathcal{N}\left(0{,}2(1-r)\right)$.

3) La loi conditionnelle de X sachant $Y=y$ est une loi de densité

$$
\begin{aligned}
f\left(x|\,y\right) &= \frac{f(x,y)}{f(.,y)} \\
&= \frac{\frac{1}{2\pi\sqrt{\det(\Sigma)}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(x,y\right)\Sigma^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right]}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\left(1-r^2\right)}}\exp\left[\frac{y^2}{2}-\frac{1}{2(1-r^2)}\left(x^2-2rxy+y^2\right)\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\left(1-r^2\right)}}\exp\left[-\frac{\left(x-ry\right)^2}{2(1-r^2)}\right]
\end{aligned}
$$

On reconnait une loi normale $\mathcal{N}\left(ry{,}1-r^2\right)$.