Partiel de Probabilités

Vendredi 17 Novembre 2000, 8h00-10h00

Partiel sans documents et sans calculatrice (une feuille manuscrite A4 est autorisée)
Les deux exercices sont indépendants

Exercice 1

Le but de cet exercice est de montrer que lorsque $X_1, ..., X_n$ sont n variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{N}(0,1)$, la densité de $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$ est :

$$g_n(y) = \frac{y^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}}}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} 1_{\mathbb{R}^+}(y) \tag{1}$$

où $\Gamma(x)$ est la fonction Gamma telle que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

1) **Raisonnement par récurrence**

1.1) Déterminer la loi de $Y_1 = X_1^2$ lorsque $X_1 \sim \mathcal{N}(0,1)$.

1.2) On suppose que Y_n possède la densité $g_n(y)$ définie par l'équation (1), que $X_{n+1} \sim \mathcal{N}(0,1)$ et que X_{n+1} est une variable aléatoire indépendante de Y_n. On pose

$$\begin{cases} U = X_{n+1}^2 + Y_n \\ V = X_{n+1} \end{cases}$$

Représenter le domaine sur lequel est défini le vecteur (U, V) puis déterminer sa densité.

1.3) En utilisant le résultat suivant (que l'on ne cherchera pas à démontrer)

$$J_{n-1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^{n-1}\, d\theta = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}$$

déterminer la loi de U et conclure.

2) **Utilisation des fonctions caractéristiques**

2.1) Montrer que lorsque $X_1 \sim \mathcal{N}(0,1)$, $Z = \frac{1}{2}X_1^2$ suit une loi Gamma dont on précisera les paramètres. En déduire la fonction caractéristique de Z en utilisant les tables.

2.2) Déterminer la fonction caractéristique de $Z_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2}X_j^2$, lorsque $X_1, ..., X_n$ sont n variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{N}(0,1)$. En déduire la loi de Z_n puis celle de Y_n.

Exercice 2

Les joueurs de casino connaissent bien la fameuse "martingale" que nous expliquons dans ce qui suit. Afin de simplifier le problème de la martingale, on suppose qu'un joueur A joue à pile ou face contre une personne B. Le joueur A gagne sa mise lorsque le côté de la pièce est celui qu'il a choisi (s'il a misé 1 franc, il récupère son 1 franc et B lui donne 1 franc). Il a le droit de rejouer lorsqu'il perd mais la partie s'arrête dès qu'il a gagné. Le joueur A commence par miser 1 franc sur le côté pile et décide de doubler sa mise à chaque fois qu'il perd. Ainsi, dans le cas de la séquence $face, face, pile$, le joueur mise tout d'abord un franc qu'il perd, puis il mise deux francs qu'il perd et enfin il mise quatre francs qu'il récupère et B lui donne quatre francs. Le jeu s'arrête alors puisque A a gagné. Dans ce cas, le gain du joueur A est $(4+4)-(1+2+4)=1$ franc.

1) On suppose dans cette question que la fortune de A est illimitée et que A joue jusqu'à ce que la pièce donne pile (martingale). En détaillant tous les cas possibles, déterminer la loi du gain de A noté G. En déduire l'espérance de G notée $E[G]$ qui représente le gain moyen de A et sa variance $Var[G]$. Interpréter ce résultat.

2) On suppose désormais que la fortune de A est limitée à 2^K-1 francs. Le joueur A continue de jouer la martingale (c'est-à-dire double sa mise tant que le coté face sort) mais après K côtés "face" consécutifs, il est ruiné et ne peut plus jouer (son gain est alors négatif). Quel est alors la loi du gain de A et son espérance mathématique. Interpréter ce résultat.

3) Non content de ses performances, le joueur A réunit N copains qui désirent jouer 2^K-1 francs au jeu de la martingale (chaque copain joue 2^K-1 francs contre B). On note G_i le gain de son $i^{ème}$ copain, $i=1,...,N$ et G la somme des gains de ses N copains (A est ruiné et donc ne peut jouer). Déterminer la loi de G.

Exercice 3

On désire démontrer la proposition suivante :

$$\boxed{\begin{array}{c}\textbf{X est un vecteur gaussien de } \mathbb{R}^n \\ \textbf{si et seulement si} \\ \forall a \in \mathbb{R}^n,\ a \neq 0, Y_a = \sum_{j=1}^{n} a_j X_j \ \textbf{est une variable aléatoire normale à 1dimension}\end{array}}$$

1) Soit X un vecteur de $\mathbb{R}^n$ de loi normale $N_n(m, \Sigma)$. Quelle est la loi de Y_a pour $a=0$ et pour $a \neq 0$?.

2) On suppose que $Y_a = \sum_{j=1}^{n} a_j X_j$ suit une loi normale $N_1(m_a, \sigma_a^2)$, $\forall a \neq 0$. Déterminer la fonction caractéristique de $X=(X_1,...,X_n)$ notée

$$\phi_X(u) = E\left[e^{i(u_1 X_1 + ... + u_n X_n)}\right]$$

en fonction de celle de Y_u. En déduire une expression de $\phi_X(u)$ en fonction de $m=E[X]$ et $\Sigma = E\left[(X-m)^t (X-m)\right]$ où ${}^tX$ désigne le vecteur transposé de X. (On trouvera la fonction caractéristique d'une loi normale à 1 dimension dans les tables)

3) Conclure