Partiel de Probabilités

Vendredi 14 Novembre 2003, 8h00-10h00

Partiel sans documents et sans calculatrice (une feuille manuscrite A4 est autorisée)
Les trois exercices sont indépendants

Exercice 1

1) On considère une variable aléatoire X de loi de Poisson de paramètre λ. Calculer la fonction caractéristique de X notée $\phi_X(u)$. Rappeler comment on peut retrouver l'expression de $E[X]$ à l'aide de la dérivée de $\phi_X(u)$. Appliquer ce résultat à une loi de Poisson de paramètre λ.
2) On considère un couple de variables aléatoires (X, Y) de fonction caractéristique $\psi_{(X,Y)}(u, v)$ définie par

$$\psi_{(X,Y)}(u, v) = E\left[e^{i(uX+vY)}\right] = \exp[P(u, v)] \tag{1}$$

avec

$$P(u, v) = ae^{i(u+v)} + be^{iu} + ce^{iv} - (a + b + c)$$

et $a \neq 0$. Dans la suite de cet exercice, on notera $\psi(u, v)$ au lieu de $\psi_{(X,Y)}(u, v)$ pour simplifier les notations.

2.1) Déterminer à l'aide de (1) les fonctions caractéristiques de X et de Y. En déduire les lois marginales de X et de Y.

2.2) Déterminer $E[XY]$ à l'aide de $\frac{\partial^2\psi(u,v)}{\partial u \partial v}$ en s'inspirant de ce qui a été fait à la question 1). En déduire $cov(X, Y)$. Les variables aléatoires sont-elles indépendantes ?

3) On pose

$$X = X_1 + X_2 \text{ et } Y = X_2 + X_3$$

où X_1, X_2 et X_3 sont trois variables aléatoires indépendantes de lois de Poisson de paramètres λ_1, λ_2 et λ_3. Montrer que la fonction caractéristique du couple (X, Y) à la forme (1) et préciser les valeurs de a, b et c en fonction de λ_1, λ_2 et λ_3

Exercice 2

1) Soit U une variable uniformément répartie sur $]0, 1]$ et a un réel > 0. Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire X définie par

$$X = -\frac{1}{a}\ln U.$$

et représenter la graphiquement. En déduire la densité de probabilité de X.
2) Retrouver le résultat de la question 1) en effectuant un changement de variables.

3) Soient U_1 et U_2 deux variables aléatoires indépendantes de lois uniformes sur $]0,1]$ et (a_1, a_2) deux réels > 0. Déterminer la loi du couple (Y, Z) avec

$$\begin{aligned} Y &= -\frac{1}{a_1} \ln [U_1] - \frac{1}{a_2} \ln [U_2] \\ Z &= -\frac{1}{a_1} \ln [U_1] \end{aligned}$$

En déduire la loi marginale de Y.

Exercice 3

On désire estimer la probabilité d'erreur dans un système de communication numérique avec codage correcteur d'erreur. Comme d'habitude, on introduit une variable X_i telle que

$$\begin{aligned} X_i &= 1 \text{ s'il y a une erreur au } i^{\grave{e}me} \text{ bit émis} \\ X_i &= 0 \text{ s'il n'y a pas d'erreur au } i^{\grave{e}me} \text{ bit émis avec} \end{aligned}$$

avec $P[X_i = 1] = p$ et $P[X_i = 0] = 1 - p = q$. On suppose qu'on observe X_i pour $i \in \{1, ..., N\}$ et on estime la probabilité d'erreur de la transmission par

$$Y_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} X_i$$

On suppose que le codage correcteur d'erreurs est tel qu'on ne peut avoir deux erreurs successives, ce qui se traduit par

$$\begin{aligned} P[X_{i+1} = 1 \,|\, X_i = 1] &= 0 \\ P[X_{i+1} = 0 \,|\, X_i = 1] &= 1 \\ P[X_{i+1} = 1 \,|\, X_i = 0] &= p \\ P[X_{i+1} = 0 \,|\, X_i = 0] &= 1 - p = q \end{aligned}$$

On suppose par ailleurs que les variables aléatoires X_i et X_j sont indépendantes dès que $|j - i| > 1$.

- 1) Rappeler la moyenne et la variance de X_i.
- 2) Déterminer $E[X_i X_j]$ pour $i = j$, $j = i + 1$, $j = i - 1$ et $|j - i| > 1$.
- 3) Calculer $E\left[(Y_N - p)^2\right]$. La variable aléatoire Y_N converge-t-elle en moyenne quadratique vers p ?