Partiel de Probabilités

Jeudi 18 novembre 2004, 8h00-10h00

Partiel sans documents et sans calculatrice (une feuille manuscrite A4 est autorisée)
Les trois exercices sont indépendants

Exercice 1 :

1) On considère un couple de variables aléatoires indépendantes (X,Y) tel que $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ et $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$. Déterminer la loi du vecteur de coordonnées polaires (ρ,θ) tel que $X = \rho\cos\theta$ et $Y = \rho\sin\theta$.
2) On pose

$$U = \frac{X^2 - Y^2}{\sqrt{X^2+Y^2}} \text{ et } V = \frac{XY}{\sqrt{X^2+Y^2}}$$

Exprimer U et V en fonction de $\cos(2\theta)$ et $\sin(2\theta)$ (rappel : $\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)$ et $\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$). Montrer que le changement de variables permettant de passer de (ρ,θ) à (U,V) est bijectif par morceaux et préciser les diverses bijections. En déduire la loi du couple (U,V).
3) Déterminer les lois marginales de U et de V. En déduire à l'aide des tables les moyennes, variances et fonctions caractéristiques de U et de V. Les variables aléatoires U et V sont-elles indépendantes ?
4) Que pensez vous de l'affirmation suivante "deux vecteurs liés par une transformation non-linéaire ne peuvent être simultanément Gaussiens" ?

Exercice 2 :

On considère un vecteur Gaussien $U = (X,Y,Z)^T$ de vecteur moyenne $m = (1,0,0)^T$ et de matrice de covariance

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Répondre aux questions suivantes en prenant soin de justifier correctement vos réponses.
1) Quelles sont les lois marginales de $(X,Z)^T$ et de Y ?
2) Les variables aléatoires Y et Z sont-elles indépendantes ?
3) Quelle est la loi du vecteur $(W,S)^T$ où $W = Y + Z$ et $S = X + Y$?
4) Les variables aléatoires W et S sont-elles indépendantes ?

Exercice 3 : Le triangle de Galton

Certains d'entre vous ont peut-être réalisé l'expérience du triangle de Galton à la cité de sciences de La Villette. Le triangle de Galton est un plan incliné hérissé de coins régulièrement disposés sur n lignes horizontales, la $k^{ième}$ ligne comportant k coins. Une bille, placée au sommet du triangle, oblique à chaque ligne vers la droite ou vers la gauche avec la même probabilité 1/2. Sous la dernière ligne de coins, il y a $n+1$ couloirs notés $C_0, C_1, ..., C_n$ dans lesquels s'amassent les billes (**le couloir C_0 est le plus à gauche et le couloir C_n est le plus à droite**). Le dispositif du triangle de Galton est illustré sur la figure ci-dessous. On suppose dans cet exercice que le nombre de billes lancées est L et on s'intéresse à donner une valeur approchée à la probabilité que le $k^{ième}$ couloir contienne i billes, avec $k = 0, ..., n$ et $i = 0, 1, ..., L$.

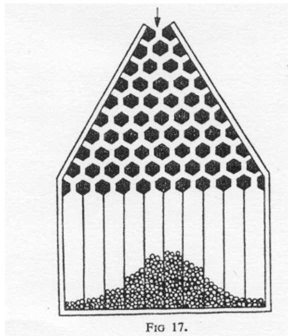


Fig 17.

1) On étudie tout d'abord avec attention les cas $n = 1, 2$ et 3 pour lesquels on a 2, 3 et 4 couloirs respectivement. En examinant les divers cas possibles, montrer qu'une bille se retrouve dans le couloir C_k si elle a obliqué un certain nombre de fois à droite noté N_d et un certain nombre de fois à gauche noté N_g. Dans le cas général, donner les valeurs de N_d et de N_g en fonction de n et de k.
2) Déterminer la probabilité p_k qu'une boule atteigne le couloir C_k (avec $k = 0, ..., n$). On notera $q_k = 1 - p_k$.
3) On envoie L boules dans le triangle de Galton et on appelle N_k le nombre de boules qui atteignent le couloir C_k (avec $k = 0, ..., n$). Quelle est la loi de N_k ? Rappeler la moyenne et la variance de cette loi.
4) Montrer que le théorème de la limite centrale peut s'appliquer à la variable aléatoire N_k et en déduire sa loi limite lorsque $L \to \infty$.
5) Puisque N_k est une variable aléatoire à valeurs dans $\{0, ..., L\}$, on a de manière évidente

$$P\left[N_k = i\right] = P\left[i - \frac{1}{2} < N_k < i + \frac{1}{2}\right].$$

En utilisant ce dernier résultat et la loi limite de N_k, montrer le résultat suivant

$$P\left[N_k = i\right] \simeq \int_{z(i)-\frac{1}{2\sqrt{Lp_kq_k}}}^{z(i)+\frac{1}{2\sqrt{Lp_kq_k}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

où $z(i)$ est une fonction que l'on précisera. Déterminer alors m et σ^2 tels que $P\left[N_k = i\right]$ puisse s'approcher pour L grand comme suit

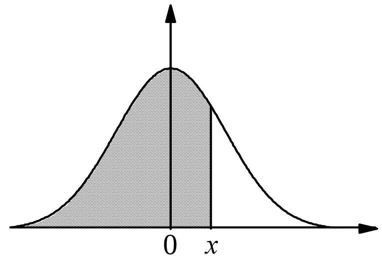
$$P\left[N_k = i\right] \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(i-m)^2}{2\sigma^2}\right]$$

En déduire la forme de la courbe dessinée par les billes dans le triangle de Galton.

Loi Normale $N(0,1)$

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{u^2}{2}}\, du$$

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$



x	**0.00**	**0.01**	**0.02**	**0.03**	**0.04**	**0.05**	**0.06**	**0.07**	**0.08**	**0.09**
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	0.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	0.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	0.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	0.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	0.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	0.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	0.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7703	.7734	.7764	0.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	0.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	0.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	0.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	0.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	0.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	0.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	0.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	0.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	0.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	0.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	0.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	0.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	0.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	0.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	0.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	0.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	0.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	0.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	0.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	0.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	0.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	0.9985	.9986	.9986

LOIS DE PROBABILITÉ DISCRÈTES

m : moyenne $\boldsymbol{\sigma}^2$: variance   **F. C. :** fonction caractéristique

$p_k = P\left[X = k\right]$ $p_{1,...,m} = P\left[X_1 = k_1, ..., X_m = k_m\right]$

LOI	**Probabilités**	**m**	$\boldsymbol{\sigma}^2$	**F. C.**
Uniforme	$p_k = \frac{1}{n}$ $k \in \{1, ..., n\}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$	$\dfrac{e^{it}\left(1 - e^{itn}\right)}{n\left(1 - e^{it}\right)}$
Bernoulli	$p_1 = P\left[X = 1\right] = p$ $p_0 = P\left[X = 0\right] = q$ $p \in [0,1] \quad q = 1 - p$	p	pq	pe^{it}
Binomiale $B\left(n, p\right)$	$p_k = C_n^k p^k q^{n-k}$ $p \in [0,1] \quad q = 1 - p$ $k \in \{0, 1, ..., n\}$	np	npq	$\left(pe^{it} + q\right)^n$
Binomiale négative	$p_k = C_{n+k-1}^{n-1} p^n q^k$ $p \in [0,1] \quad q = 1 - p$ $k \in \mathbb{N}$	$n\dfrac{q}{p}$	$n\dfrac{q}{p^2}$	$\left(\dfrac{p}{1 - qe^{it}}\right)^n$
Multinomiale	$p_{1,...,m} = \frac{n!}{k_1!...k_m!} p_1^{k_1} ... p_m^{k_m}$ $p_j \in [0,1] \quad q_j = 1 - p_j$ $k_j \in \{0, 1, \ldots, n\}$ $\displaystyle\sum_{j=1}^{m} k_j = n \quad \sum_{j=1}^{m} p_j = 1$	np_j	Variance : $np_j q_j$ Covariance : $-np_j p_k$	$\left(\displaystyle\sum_{j=1}^{m} p_j e^{it}\right)^n$
Poisson $P\left(\lambda\right)$	$p_k = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$ $\lambda > 0 \quad k \in \mathbb{N}$	λ	λ	$e^{\lambda\left(e^{it-1}\right)}$
Géométrique	$p_k = pq^{k-1}$ $p \in [0,1] \quad q = 1 - p$ $k \in \mathbb{N}^*$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{q}{p^2}$	$\dfrac{pe^{it}}{1 - qe^{it}}$

LOIS DE PROBABILITÉ CONTINUES

m : moyenne $\boldsymbol{\sigma}^2$: variance

F. C. : fonction caractéristique

LOI	Densité de probabilité	m	$\boldsymbol{\sigma}^2$	F. C.
Uniforme	$f(x) = \frac{1}{b-a}$ $x \in]a, b[$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\dfrac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}$
Gamma $\Gamma(\theta, \nu)$	$f(x) = \frac{\theta^\nu}{\Gamma(\nu)} e^{-\theta x} x^{\nu-1}$ $\theta > 0,\ \nu > 0$ $x \geq 0$	$\dfrac{\nu}{\theta}$	$\dfrac{\nu}{\theta^2}$	$\dfrac{1}{\left(1 - i\frac{t}{\theta}\right)^\nu}$
Première loi de Laplace	$f(x) = \frac{1}{2} e^{-\lvert x\rvert}$	0	2	$\dfrac{1}{1+t^2}$
Normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$	m	σ^2	$e^{imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$
Khi$_2$ χ^2_ν $\Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{\nu}{2}\right)$	$f(x) = k e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{\nu}{2}-1}$ $k = \dfrac{1}{2^{\frac{\nu}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}$ $\nu \in \mathbb{N}^*,\ \curvearrowleft \geq \nvdash$	ν	2ν	$\dfrac{1}{(1-2it)^{\frac{\nu}{2}}}$
Cauchy $c_{\lambda,\alpha}$	$f(x) = \dfrac{1}{\pi\lambda\left(1 + \left(\frac{x-\alpha}{\lambda}\right)^2\right)}$ $\lambda > 0,\ \alpha \in \mathbb{R}$	(-)	(-)	$e^{i\alpha t - \lambda\lvert t\rvert}$
Bêta	$f(x) = k x^{a-1} (1-x)^{b-1}$ $k = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}$ $a > 0,\ b > 0,\ x \in]0, 1[$	$\frac{a}{a+b}$	$\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$	(*)