Partiel de Probabilités

Mercredi 16 novembre 2005, 8h00-10h00

Partiel sans documents (une feuille manuscrite A4 est autorisée)
Les trois exercices sont indépendants

Exercice 1 :

Soit $\theta > 0$ et le domaine défini par $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad / \quad 0 < y < x\}$. Un couple (X, Y) de variables aléatoires réelles a pour densité :

$$\begin{array}{ll} f(x,y) = ke^{-\theta x} & (x,y) \in D \\ f(x,y) = 0 & \text{sinon} \end{array}$$

où k est une constante réelle positive.
1) Déterminer la constante k.
2) Montrer que les lois marginales de X et de Y sont des lois Gamma dont on déterminera les paramètres (voir tableau joint).
3) Calculer la loi de $Z = Y/X$ et montrer que les variables aléatoires X et Z sont indépendantes.

Remarque : on rappelle le résultat classique $\int_0^\infty u^n e^{-u} du = \Gamma(n+1) = n!$

Exercice 2 :

On considère un ensemble de variables aléatoires binaires X_i de lois marginales

$$\begin{aligned} P[X_i = 1] &= p, \\ P[X_i = 0] &= 1 - p = q, \end{aligned}$$

avec $i \in \mathbb{N}$ et $p \in]0, 1[$ et dont les lois conditionnelles sont définies comme suit

$$\begin{aligned} P[X_{i+1} = 1 \,|X_i = 1] &= 0 \\ P[X_{i+1} = 0 \,|X_i = 1] &= 1 \\ P[X_{i+1} = 1 \,|X_i = 0] &= \alpha \\ P[X_{i+1} = 0 \,|X_i = 0] &= 1 - \alpha \end{aligned}$$

1) Quelle est la loi du couple (X_i, X_{i+1}) ?
2) Déterminer la moyenne et la variance de la variable aléatoire X_{i+1} ainsi que la covariance du couple (X_i, X_{i+1}).
3) On effectue le changement de variables $Y_i = X_{i+1} - X_i$ et $Z_i = X_{i+1} + X_i$. Quelle est la loi du couple (Y_i, Z_i) ? En déduire les lois marginales de Y_i et de Z_i.
4) On pose $T_i = Y_i + W$, où W est une variable aléatoire de loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ indépendante de Y_i. Déterminer les lois conditionnelles de $T_i \,|Y_i = 0$, $T_i \,|Y_i = -1$ et de $T_i \,|Y_i = 1$. En utilisant le théorème des probabilités totales, déterminer $P[T_i < t]$ et en déduire la loi de T_i. Proposer une stratégie permettant à partir de T_i de déterminer lequel des couples (X_i, X_{i+1}) (parmi $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ et $(1,1)$) a été émis.

Exercice 3 :

On considère un vecteur Gaussien $X = {}^t(X_1, ..., X_n)$ de moyenne $m = (0, ..., 0)$ et de matrice de covariance $\Sigma = \sigma_x^2 I_n$, où I_n est la matrice identité de taille $n \times n$ et σ_x^2 est une constante réelle > 0. On considère également une variable aléatoire réelle U de loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma_U^2)$ (de moyenne nulle et de variance $\sigma_U^2 > 0$) indépendante du vecteur X.
1) Rappeler comment on peut obtenir la variance de X_i et la covariance du couple (X_i, X_j), $i \neq j$ à partir de la loi du vecteur X.
2) Quelle est la loi du vecteur $\begin{pmatrix} X \\ U \end{pmatrix}$? En déduire la loi du vecteur $V = \begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix}$ défini comme suit

$$\begin{aligned} Y &= \left({}^t H\right) X + aU, \\ Z &= -\left({}^t H\right) X + aU, \end{aligned}$$

où H est un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$ et a est un réel non nul. En déduire la moyenne et la matrice de covariance du vecteur V. Que se passe-t-il pour $a = 0$?
3) On se place dans le cas $a = 0$. Déterminer la loi de la variable aléatoire $\left({}^t H\right) X$. Montrer que la variable aléatoire $W = YZ$ s'écrit

$$W = YZ = -\left(\sigma_x^2 \sum_{i=1}^{n} h_i^2\right) T^2$$

où T est une variable aléatoire de loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$. En déduire la loi de W.
4) Expliquer les étapes permettant de calculer la loi de $W = YZ$ lorsque $a \neq 0$ (on expliquera juste la méthode utilisée sans faire de calcul).

LOIS DE PROBABILITÉ DISCRÈTES

m : moyenne $\boldsymbol{\sigma}^2$: variance **F. C. :** fonction caractéristique

$p_k = P[X = k]$ $p_{1,...,m} = P[X_1 = k_1, ..., X_m = k_m]$

LOI	**Probabilités**	**m**	$\boldsymbol{\sigma}^2$	**F. C.**
Uniforme	$p_k = \frac{1}{n}$ $k \in \{1, ..., n\}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$	$\dfrac{e^{it}(1-e^{itn})}{n(1-e^{it})}$
Bernoulli	$p_1 = P[X=1] = p$ $p_0 = P[X=0] = q$ $p \in [0,1]$ $q = 1-p$	p	pq	pe^{it}
Binomiale $B(n,p)$	$p_k = C_n^k p^k q^{n-k}$ $p \in [0,1]$ $q = 1-p$ $k \in \{0, 1, ..., n\}$	np	npq	$(pe^{it}+q)^n$
Binomiale négative	$p_k = C_{n+k-1}^{n-1} p^n q^k$ $p \in [0,1]$ $q = 1-p$ $k \in \mathbb{N}$	$n\dfrac{q}{p}$	$n\dfrac{q}{p^2}$	$\left(\dfrac{p}{1-qe^{it}}\right)^n$
Multinomiale	$p_{1,...,m} = \frac{n!}{k_1!...k_m!} p_1^{k_1}...p_m^{k_m}$ $p_j \in [0,1]$ $q_j = 1-p_j$ $k_j \in \{0, 1, \dots, n\}$ $\sum_{j=1}^{m} k_j = n$ $\sum_{j=1}^{m} p_j = 1$	np_j	Variance : $np_j q_j$ Covariance : $-np_j p_k$	$\left(\sum_{j=1}^{m} p_j e^{it}\right)^n$
Poisson $P(\lambda)$	$p_k = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$ $\lambda > 0$ $k \in \mathbb{N}$	λ	λ	$e^{\lambda\left(e^{it-1}\right)}$
Géométrique	$p_k = pq^{k-1}$ $p \in [0,1]$ $q = 1-p$ $k \in \mathbb{N}^*$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{q}{p^2}$	$\dfrac{pe^{it}}{1-qe^{it}}$

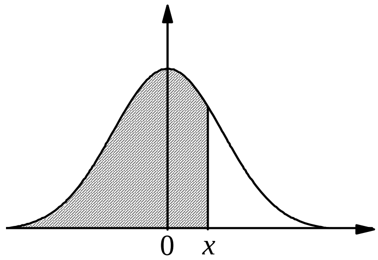
LOIS DE PROBABILITÉ CONTINUES
m : moyenne $\boldsymbol{\sigma}^2$: variance
F. C. : fonction caractéristique

LOI	Densité de probabilité	m	$\boldsymbol{\sigma}^2$	F. C.
Uniforme	$f(x) = \frac{1}{b-a}$ $x \in \,]a, b[$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\dfrac{e^{itb} - e^{ita}}{it\,(b-a)}$
Gamma $\Gamma(\theta, \nu)$	$f(x) = \frac{\theta^\nu}{\Gamma(\nu)} e^{-\theta x} x^{\nu-1}$ $\theta > 0,\ \nu > 0$ $x \geq 0$	$\dfrac{\nu}{\theta}$	$\dfrac{\nu}{\theta^2}$	$\dfrac{1}{\left(1 - i\frac{t}{\theta}\right)^\nu}$
Première loi de Laplace	$f(x) = \frac{1}{2} e^{-\|x\|}$	0	2	$\dfrac{1}{1+t^2}$
Normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$	m	σ^2	$e^{imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$
Khi$_2$ χ^2_ν $\Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{\nu}{2}\right)$	$f(x) = k e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{\nu}{2}-1}$ $k = \dfrac{1}{2^{\frac{\nu}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}$ $\nu \in \mathbb{N}^*,\ \curvearrowleft \geq \nvdash$	ν	2ν	$\dfrac{1}{(1-2it)^{\frac{\nu}{2}}}$
Cauchy $c_{\lambda,\alpha}$	$f(x) = \dfrac{1}{\pi\lambda\left(1 + \left(\frac{x-\alpha}{\lambda}\right)^2\right)}$ $\lambda > 0,\ \alpha \in \mathbb{R}$	(-)	(-)	$e^{i\alpha t - \lambda\|t\|}$
Bêta	$f(x) = k x^{a-1} (1-x)^{b-1}$ $k = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}$ $a > 0,\ b > 0,\ x \in \,]0, 1[$	$\frac{a}{a+b}$	$\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$	(*)

Loi Normale $N(0,1)$

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{u^2}{2}}\, du$$

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$



x	**0.00**	**0.01**	**0.02**	**0.03**	**0.04**	**0.05**	**0.06**	**0.07**	**0.08**	**0.09**
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	0.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	0.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	0.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	0.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	0.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	0.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	0.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7703	.7734	.7764	0.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	0.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	0.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	0.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	0.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	0.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	0.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	0.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	0.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	0.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	0.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	0.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	0.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	0.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	0.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	0.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	0.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	0.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	0.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	0.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	0.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	0.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	0.9985	.9986	.9986