Partiel de Probabilités

Mardi 13 novembre 2007, 8h00-10h00

Partiel sans documents (une feuille manuscrite A4 est autorisée)

Exercice 1

On considère une variable aléatoire Z de loi exponentielle de paramètre $a > 0$ dont la densité est

$$g(z) = \begin{cases} ae^{-az} & \text{si } z \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1) On considère la variable aléatoire $X = \exp Z$.

- Montrer que la densité de probabilité de X s'écrit $h(x) = \frac{a}{x^{a+1}} \mathbb{I}_D(x)$, où D est le domaine sur lequel est définie cette densité (à déterminer avec soin) et $\mathbb{I}_D(x)$ est la fonction indicatrice sur ce domaine ($\mathbb{I}_D(x) = 1$ si $x \in D$ et $\mathbb{I}_D(x) = 0$ sinon). Dans la suite de cet exercice, on dira que X suit une loi de Paréto de paramètre a, ce que l'on notera $X \sim P(a)$.
- Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire X et représenter la graphiquement.
- Calculer la moyenne et la variance de X (en supposant que a est tel que ces quantités existent)
- Déterminer $E\left[\frac{1}{X}\right]$.

2) Soient deux variables aléatoires indépendantes notées X et Y de lois de Paréto de paramètres a et b, i.e. $X \sim P(a)$ et $Y \sim P(b)$.

- Déterminer la densité du couple (U, V) avec $U = XY$ et $V = \frac{X}{Y}$. On prendra soin de déterminer le domaine sur lequel est définie cette densité notée $f(u, v)$ et de le représenter graphiquement.
- Déterminer les lois marginales des variables aléatoires U et V. Vérifier que les densités obtenues notées $f(u, .)$ et $f(., v)$ vérifient

$$\int f(u, .)du = \int f(v, .)dv = 1$$

- Les variables aléatoires U et V sont-elles indépendantes ?
- Á partir de X et Y, calculer la covariance du couple (U, V) noté $\text{cov}(U, V)$ et trouver l'ensemble des couples (a, b) avec $a > 0$ et $b > 0$ pour lequels cette covariance est nulle.

$\boxed{\textbf{Exercice } 2}$

On considère un vecteur Gaussien (X, Y, Z) de vecteur moyenne $m = (0, 0, 0)$ et de matrice de covariance définie comme suit

$$\Sigma = I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On pose $U = X, V = \rho X + \sqrt{1-\rho^2}Y$ et $W = \rho X + \sqrt{1-\rho^2}Z$, où $\rho \in]0, 1[$.
1) Quelle est la loi du vecteur (U, V, W) ?
2) Quelle est la densité de la variable aléatoire $V|W$? En déduire la loi de la variable aléatoire $V|W$.
3) Quelles sont les lois marginales $U - aV - bW$ et de (V, W) ?
4) Quelles sont les valeurs de a et b (fonctions de ρ) telles que le vecteur (V, W) soit indépendant de $U - aV - bW$?
5) En utilisant la décomposition $U = U - \xi + \xi$ avec $\xi = aV + bW$, où a et b ont été déterminées à la question précédente, déterminer

$$E\left[U|V, W\right]$$

RAPPELS CALCUL MATRICIEL

Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on a $\det(A) = ad - bc$ et $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$