Partiel de Probabilités

Jeudi 13 novembre 2008, 8h00-10h00

Partiel sans documents (une feuille manuscrite A4 est autorisée)

Exercice 1

On considère deux variables aléatoires indépendantes X et Y de lois de Bernoulli définies par

$$\begin{aligned} P[X=1] &= P[Y=1] = p \\ P[X=0] &= P[Y=0] = q = 1-p \end{aligned}$$

et les variables aléatoires Z et T définies par

$$\left\{ \begin{array}{c} Z = X + Y \\ T = X - aY \end{array} \right.$$

avec $a > 0$.
1) Quelle est la loi du couple (Z, T) ?
2) Quelles sont les lois marginales de Z et de T (on discutera suivant les valeurs de a) ?
3) Déterminer $E[Z]$ et $E[T]$.
4) Déterminer $\text{var}[Z]$ et $\text{var}[T]$.
5) Déterminer le coefficient de corrélation du couple (Z, T) noté $\rho(a)$.

Exercice 2

On considère deux variables aléatoires indépendantes X et Y de lois exponentielles de densités

$$f(x,.) = \left\{ \begin{array}{c} \lambda e^{-\lambda x} \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x < 0 \end{array} \right. \quad \text{et } f(.,y) = \left\{ \begin{array}{c} \lambda e^{-\lambda y} \text{ si } y > 0 \\ 0 \text{ si } y < 0 \end{array} \right.$$

et pour $a > 0$, les variables aléatoires Z et T définies par

$$\left\{ \begin{array}{c} Z = X + Y \\ T = X - aY \end{array} \right.$$

1) Quelle est la densité du couple (Z, T) ?
2) Quelles sont les lois marginales de Z et de T ?
3) Déterminer $E[Z]$ et $\text{var}[Z]$ (on pourra utiliser les tables de lois et reconnaître la loi de Z).
4) Calculer $E[T]$ et $\text{var}[T]$ (on pourra utiliser la fonction gamma, voir rappels).
5) Déterminer le coefficient de corrélation du couple (Z, T) noté $\rho(a)$ et montrer qu'il est identique à celui de l'exercice 1. Expliquer ce résultat.

$\boxed{\textbf{Exercice } 3}$

On suppose que $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ est un vecteur Gaussien de moyenne $m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et de matrice de covariance $\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & r \\ r & 1 \end{pmatrix}$ avec $r \in]-1,+1[$.

1) Déterminer la densité du couple $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ puis les densités des lois marginales de X et de Y.

2) Montrer que la loi conditionnelle de Y sachant $X = x$ est une loi normale dont on déterminera les paramètres.

3) On définit la variable aléatoire Z comme suit

$$\begin{aligned} Z &= 1 \text{ si } Y > a \\ Z &= 0 \text{ si } Y < a \end{aligned}$$

Déterminer les probabilités $P[Z = 1 \,|X = x]$ et $P[Z = 0 \,|X = x]$ en fonction de

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du.$$

RAPPELS

CALCUL MATRICIEL

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \text{ on a } \det(A) = ad - bc \text{ et } A^{-1} = \tfrac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

FONCTION GAMMA

On rappelle que la fonction Gamma est définie par

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} u^{x-1} e^{-u} du, \qquad x > 0$$

avec

$$\Gamma(n+1) = n! \text{ si } n \in \mathbb{N}$$