**Partiel de Probabilités**

Mardi 17 novembre 2009, 8h00-10h00

*Partiel sans documents (une feuille manuscrite A4 est autorisée)*

## Exercice 1

On considère deux variables aléatoires indépendantes $X$ et $Y$ définies par

$$\begin{aligned} P[X=1] &= p \text{ et } P[X=0]=1-p \\ P[Y=1] &= r \text{ et } P[Y=-1]=1-r \end{aligned}$$

et les variables aléatoires $Z$ et $T$ définies par

$$\begin{cases} Z = XY \\ T = X \end{cases}$$

1) Quelle est la loi du couple $(Z,T)$ ?
2) Quelle est la loi marginales de $Z$ ?
3) Déterminer $E[Z]$ et $\text{var}[Z]$.
4) Déterminer la covariance du couple $(Z,T)$ notée $\text{cov}[Z,T]$.

## Exercice 2

On considère deux variables aléatoires indépendantes $X$ et $Y$ de lois uniformes sur les intervalles $[0,1]$ et $[-1,1]$, c'est-à-dire possédant les densités

$$f(x,.) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in [0,1] \\ 0 \text{ si } x \notin [0,1] \end{cases} \quad \text{et } f(.,y) = \begin{cases} \frac{1}{2} \text{ si } y \in [-1,1] \\ 0 \text{ si } y \notin [-1,1] \end{cases}$$

et les variables aléatoires $Z$ et $T$ définies par

$$\begin{cases} Z = XY \\ T = X \end{cases}$$

1) Quelle est la densité du couple $(Z,T)$ ? Représenter graphiquement les valeurs possibles du couple $(Z,T)$.
2) Quelle est la loi marginale de $Z$ ? Représenter graphiquement la densité de $Z$.
3) Déterminer $E[Z]$ et $\text{var}[Z]$.
4) Déterminer la covariance du couple $(Z,T)$ notée $\text{cov}[Z,T]$. Les variables $Z$ et $T$ sont-elles indépendantes ?

$\boxed{\textbf{Exercice } 3}$

On considère une variable aléatoire $X$ de loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$ et une variable aléatoire $Y$ indépendante de $X$ définie par

$$P[Y=1]=r \text{ et } P[Y=-1]=1-r$$

avec $r \neq \frac{1}{2}$.
1) Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire $X$.
2) Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire $Z=XY$ notée $G(z)=P[Z<z]$ (on pourra distinguer les cas $z<-1, z\in[-1,0], z\in[0,1]$ et $z>1$). En déduire la densité de $Z$.
3) Déterminer la covariance du couple $(Z,X)$ notée $\text{cov}(Z,X)$.

$\boxed{\textbf{Exercice } 4}$

On considère une suite de variables aléatoires indépendantes $X_k$, $k\in\mathbb{N}$ de lois de Bernoulli de paramètre $p$, c'est-à-dire

$$P[X_k=1]=p \text{ et } P[X_k=0]=q=1-p, \qquad \forall k\in\mathbb{N}$$

1) Déterminer la fonction caractéristique de la variable aléatoire $X_k$ puis celle de $Y=\sum_{k=1}^{n} X_k$. En déduire la loi de $Y$.
2) En utilisant un des théorèmes du cours, montrer que la variable aléatoire

$$Z=\frac{Y-np}{\sqrt{npq}}$$

converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi. En déduire une approximation de $P[Y>y_0]$ (pour $n$ suffisamment grand) que l'on exprimera en fonction de $y_0, n, p, q$ et

$$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du$$

3) Montrer que $T=\frac{Y}{n}$ converge en moyenne quadratique vers $p$.