Partiel de Probabilités

Mardi 2 novembre 2010, 8h00-10h00

Partiel sans documents (une feuille manuscrite A4 est autorisée)

Exercice 1

On considère un couple de variables aléatoires continues (X, Y) dont la densité est définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \exp\left[-(x+y)\right] \text{ si } x > 0 \text{ et } y > 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

et les variables aléatoires Z et T définies par

$$Z = X + Y \text{ et } T = \frac{Y}{X}$$

1) Montrer que le changement de variables liant les couples (X, Y) et (Z, T) est bijectif et représenter graphiquement les valeurs possibles du couple (Z, T).
2) Quelle est la densité du couple (Z, T) ?
3) Déterminer les lois marginales de Z et T. En s'aidant des tables de lois, reconnaître la loi de Z. Les variables aléatoires Z et T sont-elles indépendantes ?
4) Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire T.

Rappel : on rappelle que la fonction Gamma vérifie la propriété

$$\Gamma(n+1) = \int_0^{\infty} u^n e^{-u} du = n! \text{ si } n \in \mathbb{N}$$

Exercice 2 : loi géométrique

On lance une pièce de monnaie plusieurs fois et on s'arrête lorsqu'on obtient le premier "pile". On appelle X le nombre de lancers effectués et on suppose que ces lancers sont indépendants.
1) Montrer que X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^* = \{1, 2, ...\}$ telle que

$$P\left[X = n\right] = pq^{n-1}, \ n \in \mathbb{N}^*$$

où p est la probabilité d'avoir "pile" pour un lancer de pièce et $q = 1 - p$. On dit que X suit une loi géométrique de paramètre p.
2) Déterminer $P\left[X > l\right]$ pour $l \in \mathbb{N}$ et montrer que

$$P\left[X > k + l \mid X > k\right] = P\left[X > l\right], \qquad \forall (k, l) \in \mathbb{N}^2$$

On dit que la loi de X est une loi "sans mémoire". En supposant que X est un temps d'attente, pouvez vous expliquer cette dénomination ?
3) On considère deux variables aléatoires X et Y indépendantes de même loi géométrique de paramètre p.

- Déterminer $P\left[X - Y = 0\right]$ en fonction de p uniquement.
- Déterminer la loi de $Z = X + Y$ puis $E(Z)$ et $\text{var}(Z)$.

$\boxed{\textbf{Exercice } 3}$

On considère une suite de variables aléatoires indépendantes $C_k,\ k \in \mathbb{N}$ et on construit une suite de variables aléatoires $B_k,\ k \in \mathbb{N}$ de la manière suivante

$$\begin{aligned} B_0 &= 0 \\ B_k &= C_k + aB_{k-1}, \qquad \forall k \geq 1 \end{aligned}$$

où a est un réel appartenant à l'intervalle $[0, 1]$.
1) On suppose que

$$E\left[e^{iuC_n}\right] = \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right), \qquad \forall u \in \mathbb{R}$$

Sans faire aucun calcul, déterminer la loi de C_n.
2) On pose $V_n = (C_1, ..., C_n)^t$. Quelle est la loi du vecteur V_n ?
3) On pose $W_n = (B_1, ..., B_n)^t$. Quelle est la loi du vecteur W_n ? (on pourra montrer que $W_n = A_n V_n$, où A_n est une matrice de taille $n \times n$ que l'on déterminera). Expliciter la matrice de covariance de W_n pour $n = 2$ et $n = 3$.
4) On désire étudier la loi limite de B_n.

- Pour $a \in [0, 1[$, déterminer la loi de B_n, sa moyenne et sa variance. Montrer que B_n converge en loi vers une loi normale centrée dont on précisera la variance.
- Pour $a = 1$, en utilisant un des théorèmes du cours, montrer que la variable aléatoire $\frac{1}{\sqrt{n}} B_n$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

LOIS DE PROBABILITÉ DISCRÈTES

m : moyenne $\boldsymbol{\sigma}^2$: variance **F. C. :** fonction caractéristique

$p_k = P[X = k]$ $p_{1,...,m} = P[X_1 = k_1, ..., X_m = k_m]$

LOI	**Probabilités**	**m**	$\boldsymbol{\sigma}^2$	**F. C.**
Uniforme	$p_k = \frac{1}{n}$ $k \in \{1, ..., n\}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$	$\dfrac{e^{it}\left(1-e^{itn}\right)}{n\left(1-e^{it}\right)}$
Bernoulli	$p_1 = P[X = 1] = p$ $p_0 = P[X = 0] = q$ $p \in [0,1] \quad q = 1 - p$	p	pq	pe^{it}
Binomiale $B(n, p)$	$p_k = C_n^k p^k q^{n-k}$ $p \in [0,1] \quad q = 1 - p$ $k \in \{0, 1, ..., n\}$	np	npq	$\left(pe^{it} + q\right)^n$
Binomiale négative	$p_k = C_{n+k-1}^{n-1} p^n q^k$ $p \in [0,1] \quad q = 1 - p$ $k \in \mathbb{N}$	$n\dfrac{q}{p}$	$n\dfrac{q}{p^2}$	$\left(\dfrac{p}{1-qe^{it}}\right)^n$
Multinomiale	$p_{1,...,m} = \frac{n!}{k_1!...k_m!} p_1^{k_1} ... p_m^{k_m}$ $p_j \in [0,1] \quad q_j = 1 - p_j$ $k_j \in \{0, 1, \ldots, n\}$ $\sum_{j=1}^{m} k_j = n \quad \sum_{j=1}^{m} p_j = 1$	np_j	Variance : $np_j q_j$ Covariance : $-np_j p_k$	$\left(\sum_{j=1}^{m} p_j e^{it}\right)^n$
Poisson $P(\lambda)$	$p_k = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$ $\lambda > 0 \quad k \in \mathbb{N}$	λ	λ	$\exp\left[\lambda\left(e^{it-1}\right)\right]$
Géométrique	$p_k = pq^{k-1}$ $p \in [0,1] \quad q = 1 - p$ $k \in \mathbb{N}^*$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{q}{p^2}$	$\dfrac{pe^{it}}{1-qe^{it}}$

LOIS DE PROBABILITÉ CONTINUES

m : moyenne **σ^2** : variance **F. C. :** fonction caractéristique

LOI	**Densité de probabilité**	**m**	**σ^2**	**F. C.**
Uniforme	$f(x) = \frac{1}{b-a}$ $x \in]a, b[$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\dfrac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}$
Gamma $\Gamma(\theta, \nu)$	$f(x) = \frac{\theta^\nu}{\Gamma(\nu)} e^{-\theta x} x^{\nu - 1}$ $\theta > 0,\ \nu > 0$ $x \geq 0$	$\dfrac{\nu}{\theta}$	$\dfrac{\nu}{\theta^2}$	$\dfrac{1}{\left(1 - i\frac{t}{\theta}\right)^\nu}$
Première loi de Laplace	$f(x) = \frac{1}{2} e^{-\lvert x \rvert}$	0	2	$\dfrac{1}{1+t^2}$
Normale $\mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right)$	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$	m	σ^2	$e^{imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$
Khi$_2$ χ^2_ν $\Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{\nu}{2}\right)$	$f(x) = k e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{\nu}{2} - 1}$ $k = \dfrac{1}{2^{\frac{\nu}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}$ $\nu \in \mathbb{N}^*,\ \curvearrowleft \geq \nvdash$	ν	2ν	$\dfrac{1}{(1-2it)^{\frac{\nu}{2}}}$
Cauchy $c_{\lambda, \alpha}$	$f(x) = \dfrac{1}{\pi\lambda\left(1 + \left(\frac{x-\alpha}{\lambda}\right)^2\right)}$ $\lambda > 0,\ \alpha \in \mathbb{R}$	(-)	(-)	$e^{i\alpha t - \lambda \lvert t \rvert}$
Bêta	$f(x) = k x^{a-1} (1-x)^{b-1}$ $k = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}$ $a > 0,\ b > 0,\ x \in]0, 1[$	$\frac{a}{a+b}$	$\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$	(*)