Partiel de Probabilités

Jeudi 3 novembre 2011, 8h00-10h00

Partiel sans documents (une feuille manuscrite A4 est autorisée)
Barème indicatif : Ex. 1 (10pts), Ex. 2 (5pts), Ex. 3 (5pts)

Exercice 1: Loi de Rayleigh

On considère deux variables aléatoires indépendantes X et Y de lois normales $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ et on cherche la loi de la variable aléatoire

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

appelée loi de Rayleigh.
1) Déterminer la loi du couple (R, θ) obtenu à partir de la définition des coordonnées polaires

$$\begin{aligned} X &= R\cos\theta \\ Y &= R\sin\theta \end{aligned}$$

En déduire la loi de R.
2) On remarque que

$$R = \sigma\sqrt{U} \text{ avec } U = \left(\frac{X}{\sigma}\right)^2 + \left(\frac{Y}{\sigma}\right)^2$$

Rappeler la loi commune à $\frac{X}{\sigma}$ et $\frac{Y}{\sigma}$, la loi de U (vue en cours) et en déduire la loi de R (déjà déterminée à la question précédente).
3) Une autre manière de déterminer la loi de R est de calculer sa fonction de répartition notée $F(r)$. Exprimer $F(r)$ en fonction d'une intégrale double de la densité du couple (X, Y) notée $f(x, y)$ sur un domaine que l'on précisera. Effectuer le changement de variables des coordonnées polaires dans cette intégrale double et en déduire la densité de R déjà déterminée aux deux questions précédentes.
4) Déterminer $E[R]$ et $\text{var}[R]$.
5) On considère n variables aléatoires $R_1, ..., R_n$ indépendantes suivant la loi de Rayleigh. Déterminer la fonction caractéristique de

$$S = \sum_{k=1}^{n} R_k^2$$

et en déduire que S suit une loi Gamma dont on déterminera les paramètres.

Exercice 2 : vecteurs Gaussiens

On considère un vecteur Gaussien de $\mathbb{R}^4$ de moyenne $\mathbf{m} = (0,0,0,0)^T$ et de matrice de covariance $\mathbf{M}$ telle que

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0}_2 \\ \mathbf{0}_2 & \mathbf{B} \end{bmatrix} \text{ avec } \mathbf{0}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

1) Déterminer les lois marginales des couples (X_1, X_2),(X_1, X_3) et (X_1, X_4). Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont elles indépendantes ? Même question pour les variables X_1 et X_3 puis pour les variables X_1 et X_4 (prenez soin de justifier vos réponses).
2) Soient a et b deux réels non nuls.

- Quelle est la loi de $U = a\sum_{i=1}^{4} X_i$?
- Déterminer la loi du couple $(V, W)^T$ avec

$$V = a\,(X_1 + X_2) \text{ et } W = b\,(X_3 + X_4)\,.$$

Les variables aléatoires V et W sont-elles indépendantes ?.

Exercice 3 : variables aléatoires discrètes

On considère une variable aléatoire discrète uniforme X à valeurs dans $\{-2, +2\}$ (i.e., $P[X = -2] = P[X = 2] = 1/2$) et une variable aléatoire binaire Y telle que

$$P[Y = 1] = p \text{ et } P[Y = 0] = q = 1 - p$$

avec $p \in]0, 1[$. On suppose de plus que X et Y sont des variables aléatoires indépendantes.
1) Quelle est la loi de la variable aléatoire $U = XY$? Déterminer $E(U)$ et $\mathrm{Var}(U)$.
2) Quelle est la loi de la variable aléatoire $V = X^2Y^2$? Déterminer $E(V)$ et $\mathrm{Var}(V)$.
3) Déterminer la loi du couple (U, V). Déterminer la covariance de ce couple notée $\mathrm{cov}(U, V)$. Les variables aléatoires U et V sont-elles indépendantes ? Commenter ces deux derniers résultats.

LOIS DE PROBABILITÉ DISCRÈTES

m : moyenne $\boldsymbol{\sigma}^2$: variance **F. C. :** fonction caractéristique

$p_k = P[X = k]$ $p_{1,\dots,m} = P[X_1 = k_1, \dots, X_m = k_m]$

LOI	**Probabilités**	**m**	$\boldsymbol{\sigma}^2$	**F. C.**
Uniforme	$p_k = \frac{1}{n}$ $k \in \{1, \dots, n\}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$	$\dfrac{e^{it}(1-e^{itn})}{n(1-e^{it})}$
Bernoulli	$p_1 = P[X=1] = p$ $p_0 = P[X=0] = q$ $p \in [0,1] \quad q = 1-p$	p	pq	pe^{it}
Binomiale $B(n,p)$	$p_k = C_n^k p^k q^{n-k}$ $p \in [0,1] \quad q = 1-p$ $k \in \{0, 1, \dots, n\}$	np	npq	$(pe^{it} + q)^n$
Binomiale négative	$p_k = C_{n+k-1}^{n-1} p^n q^k$ $p \in [0,1] \quad q = 1-p$ $k \in \mathbb{N}$	$n\dfrac{q}{p}$	$n\dfrac{q}{p^2}$	$\left(\dfrac{p}{1-qe^{it}}\right)^n$
Multinomiale	$p_{1,\dots,m} = \frac{n!}{k_1!\dots k_m!} p_1^{k_1} \dots p_m^{k_m}$ $p_j \in [0,1] \quad q_j = 1 - p_j$ $k_j \in \{0, 1, \dots, n\}$ $\sum_{j=1}^{m} k_j = n \quad \sum_{j=1}^{m} p_j = 1$	np_j	Variance : $np_j q_j$ Covariance : $-np_j p_k$	$\left(\sum_{j=1}^{m} p_j e^{it}\right)^n$
Poisson $P(\lambda)$	$p_k = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^k}{k!}$ $\lambda > 0 \quad k \in \mathbb{N}$	λ	λ	$\exp[\lambda(e^{it-1})]$
Géométrique	$p_k = pq^{k-1}$ $p \in [0,1] \quad q = 1-p$ $k \in \mathbb{N}^*$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{q}{p^2}$	$\dfrac{pe^{it}}{1-qe^{it}}$

LOIS DE PROBABILITÉ CONTINUES
m : moyenne $\boldsymbol{\sigma}^2$: variance **F. C. :** fonction caractéristique

LOI	**Densité de probabilité**	**m**	$\boldsymbol{\sigma}^2$	**F. C.**
Uniforme	$f(x) = \frac{1}{b-a}$ $x \in]a, b[$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\dfrac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}$
Gamma $\Gamma(\theta, \nu)$	$f(x) = \frac{\theta^\nu}{\Gamma(\nu)} e^{-\theta x} x^{\nu-1}$ $\theta > 0,\ \nu > 0$ $x \geq 0$	$\dfrac{\nu}{\theta}$	$\dfrac{\nu}{\theta^2}$	$\dfrac{1}{\left(1 - i\frac{t}{\theta}\right)^\nu}$
Première loi de Laplace	$f(x) = \frac{1}{2} e^{-\lvert x \rvert}$	0	2	$\dfrac{1}{1+t^2}$
Normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$	m	σ^2	$e^{imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$
Khi$_2$ χ^2_ν $\Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{\nu}{2}\right)$	$f(x) = k e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{\nu}{2}-1}$ $k = \dfrac{1}{2^{\frac{\nu}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}$ $\nu \in \mathbb{N}^*,\ \frown \geq \nvdash$	ν	2ν	$\dfrac{1}{(1-2it)^{\frac{\nu}{2}}}$
Cauchy $c_{\lambda,\alpha}$	$f(x) = \dfrac{1}{\pi\lambda\left(1 + \left(\frac{x-\alpha}{\lambda}\right)^2\right)}$ $\lambda > 0,\ \alpha \in \mathbb{R}$	(-)	(-)	$e^{i\alpha t - \lambda \lvert t \rvert}$
Bêta	$f(x) = k x^{a-1} (1-x)^{b-1}$ $k = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}$ $a > 0,\ b > 0,\ x \in]0, 1[$	$\frac{a}{a+b}$	$\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$	(*)