Partiel de Probabilités

Mardi 23 octobre 2012, 10h00-12h00

Partiel sans documents (une feuille manuscrite A4 est autorisée)
Barème indicatif : Ex. 1 (7pts), Ex. 2 (8pts), Ex. 3 (7pts)

Exercice 1

On considère un couple de variables aléatoires discrètes (X, Y) défini comme suit

$$\begin{aligned} P[(X,Y)=(0,0)] &= \frac{8}{32} \\ P[(X,Y)=(-1,-1)] &= P[(X,Y)=(1,-1)] = P[(X,Y)=(1,0)] = P[(X,Y)=(0,1)] = \frac{3}{32} \\ P[(X,Y)=(0,-1)] &= P[(X,Y)=(-1,0)] = \frac{5}{32} \\ P[(X,Y)=(-1,1)] &= P[(X,Y)=(1,1)] = \frac{1}{32} \end{aligned}$$

1) Déterminer les lois marginales de X et de Y.
2) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
3) Déterminer la covariance du couple (X, Y) notée $\text{cov}(X, Y)$. Peut-on retrouver le résultat de la question précédente avec la valeur de $\text{cov}(X, Y)$?
4) Déterminer la loi du couple (Z, T) avec $Z = X^2$ et $T = Y^2$ puis les lois marginales de Z et T. Les variables aléatoires Z et T sont-elles indépendantes ?
5) Que pensez vous de l'affirmation “deux variables aléatoires discrètes X et Y sont indépendantes si et seulement si X^2 et Y^2 sont indépendantes” ?

Exercice 2

On considère un couple de variables aléatoires continues (X, Y) de densité

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4}(1 + xy) \text{ si } |x| < 1 \text{ et } |y| < 1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

1) Déterminer les lois marginales de X et de Y.
2) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
3) Déterminer la covariance du couple (X, Y) notée $\text{cov}(X, Y)$. Peut-on retrouver le résultat de la question précédente avec la valeur de $\text{cov}(X, Y)$?
4) On voudrait déterminer la loi du couple (Z, T) avec $Z = X^2$ et $T = Y^2$. Montrer que ce changement de variables définit quatre bijections que l'on précisera. En déduire la loi du couple (Z, T) puis les lois marginales de Z et T. Les variables aléatoires Z et T sont-elles indépendantes ?
5) Que pensez vous de l'affirmation “deux variables aléatoires continues X et Y sont indépendantes si et seulement si X^2 et Y^2 sont indépendantes” ?

Exercice 3

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes de même loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. On pose

$$Y_1 = \frac{1}{2}(X_1 + X_2) \text{ et } Y_2 = \frac{1}{2}(X_1 - X_2)$$

1) Déterminer les lois des vecteurs (X_1, X_2) et (Y_1, Y_2). Les variables Y_1 et Y_2 sont elles indépendantes ? (prenez soin de justifier vos réponses).

2) On pose

$$\overline{X} = \frac{1}{2}(X_1 + X_2) \text{ et } S^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$$

- Exprimer $\overline{X}$ et S^2 en fonction de Y_1 et Y_2.
- Les variables aléatoires $\overline{X}$ et S^2 sont-elles indépendantes ?
- Déterminer les lois de $\overline{X}$ et $2S^2$.

LOIS DE PROBABILITÉ DISCRÈTES

m : moyenne $\boldsymbol{\sigma}^2$: variance **F. C. :** fonction caractéristique

$p_k = P[X = k]$ $p_{1,...,m} = P[X_1 = k_1, ..., X_m = k_m]$

LOI	Probabilités	m	$\boldsymbol{\sigma}^2$	F. C.
Uniforme	$p_k = \frac{1}{n}$ $k \in \{1, ..., n\}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$	$\dfrac{e^{it}\left(1 - e^{itn}\right)}{n\left(1 - e^{it}\right)}$
Bernoulli	$p_1 = P[X = 1] = p$ $p_0 = P[X = 0] = q$ $p \in [0, 1] \quad q = 1 - p$	p	pq	pe^{it}
Binomiale $B(n, p)$	$p_k = C_n^k p^k q^{n-k}$ $p \in [0, 1] \quad q = 1 - p$ $k \in \{0, 1, ..., n\}$	np	npq	$\left(pe^{it} + q\right)^n$
Binomiale négative	$p_k = C_{n+k-1}^{n-1} p^n q^k$ $p \in [0, 1] \quad q = 1 - p$ $k \in \mathbb{N}$	$n\dfrac{q}{p}$	$n\dfrac{q}{p^2}$	$\left(\dfrac{p}{1 - qe^{it}}\right)^n$
Multinomiale	$p_{1,...,m} = \frac{n!}{k_1!...k_m!} p_1^{k_1} ... p_m^{k_m}$ $p_j \in [0, 1] \quad q_j = 1 - p_j$ $k_j \in \{0, 1, \ldots, n\}$ $\displaystyle\sum_{j=1}^m k_j = n \quad \sum_{j=1}^m p_j = 1$	np_j	Variance : $np_j q_j$ Covariance : $-np_j p_k$	$\left(\displaystyle\sum_{j=1}^m p_j e^{it}\right)^n$
Poisson $P(\lambda)$	$p_k = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$ $\lambda > 0 \quad k \in \mathbb{N}$	λ	λ	$\exp\left[\lambda\left(e^{it-1}\right)\right]$
Géométrique	$p_k = pq^{k-1}$ $p \in [0, 1] \quad q = 1 - p$ $k \in \mathbb{N}^*$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{q}{p^2}$	$\dfrac{pe^{it}}{1 - qe^{it}}$

LOIS DE PROBABILITÉ CONTINUES

m : moyenne $\boldsymbol{\sigma}^2$: variance **F. C. :** fonction caractéristique

LOI	**Densité de probabilité**	**m**	$\boldsymbol{\sigma}^2$	**F. C.**
Uniforme	$f(x) = \frac{1}{b-a}$ $x \in]a, b[$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\dfrac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}$
Gamma $\Gamma(\theta, \nu)$	$f(x) = \frac{\theta^\nu}{\Gamma(\nu)} e^{-\theta x} x^{\nu-1}$ $\theta > 0,\ \nu > 0$ $x \geq 0$	$\dfrac{\nu}{\theta}$	$\dfrac{\nu}{\theta^2}$	$\dfrac{1}{\left(1 - i\frac{t}{\theta}\right)^\nu}$
Première loi de Laplace	$f(x) = \frac{1}{2} e^{-\lvert x \rvert}$	0	2	$\dfrac{1}{1+t^2}$
Normale $\mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right)$	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$	m	σ^2	$e^{imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$
Khi$_2$ χ^2_ν $\Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{\nu}{2}\right)$	$f(x) = k e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{\nu}{2}-1}$ $k = \dfrac{1}{2^{\frac{\nu}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}$ $\nu \in \mathbb{N}^*,\ \curvearrowleft \geq \nvdash$	ν	2ν	$\dfrac{1}{(1-2it)^{\frac{\nu}{2}}}$
Cauchy $c_{\lambda,\alpha}$	$f(x) = \dfrac{1}{\pi\lambda\left(1 + \left(\frac{x-\alpha}{\lambda}\right)^2\right)}$ $\lambda > 0,\ \alpha \in \mathbb{R}$	(-)	(-)	$e^{i\alpha t - \lambda \lvert t \rvert}$
Bêta	$f(x) = k x^{a-1} (1-x)^{b-1}$ $k = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}$ $a > 0,\ b > 0,\ x \in]0, 1[$	$\frac{a}{a+b}$	$\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$	(*)