Partiel de Probabilités

Mercredi 23 octobre 2013, 8h00-10h00

Partiel sans documents (une feuille manuscrite A4 est autorisée)
Barème indicatif : Ex. 1 (10pts), Ex. 2 (5pts), Ex. 3 (5pts)

Exercice 1

On considère un couple de variables aléatoires continues (X, Y) de densité

$$f(x, y) = \begin{cases} c \text{ si } x > 0, y > 0 \text{ et } x + y < 1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

avec $c > 0$.

1) Déterminer la constante c pour que f définisse une densité de probabilité.
2) Déterminer les lois marginales de X et de Y. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
3) Déterminer la moyenne $E[X]$ et la variance $\text{var}[X]$ de la variable aléatoire X.
4) Soit $y \in]0, 1[$. Déterminer la densité de la loi conditionnelle de $X|Y = y$. Représenter graphiquement cette densité et déterminer sa moyenne notée $E[X|Y = y]$.
5) Déterminer le coefficient de corrélation du couple (X, Y).
6) Déterminer la loi du couple (Z, T) avec $Z = X$ et $T = X + Y$.

Exercice 2

On considère deux variables aléatoires X et Y de lois de Bernoulli définies comme suit

$$\begin{aligned} P[X = 1] &= p, P[X = 0] = 1 - p, P[Y = 1] = p, P[Y = 0] = 1 - p \\ P[(X, Y) = (1, 1)] &= P[(X, Y) = (0, 0)] = r \end{aligned}$$

avec $0 < r < p \leq \frac{1}{2}$.

1) Déterminer la covariance du couple (X, Y) noté $\text{cov}(X, Y)$.
2) En utilisant le fait que l'événement "$X = 0$" est la réunion des deux événements "$X = 0, Y = 0$" et "$X = 0, Y = 1$", déterminer

$$P_{01} = P[X = 0, Y = 1].$$

De manière similaire, déterminer P_{01} en utilisant le fait que l'événement "$Y = 1$" est la réunion des deux événements "$X = 0, Y = 1$" et "$X = 1, Y = 1$". En déduire la valeur de p.

3) En s'inspirant du résultat de la question 2), déterminer

$$P_{10} = P[X = 1, Y = 0].$$

En déduire la loi du couple (X, Y).

4) Déterminer la loi de la variable aléatoire $Z = X - Y$.

Exercice 3

On considère un vecteur gaussien $\mathbf{V} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$ de vecteur moyenne $\mathbf{m}$ et de matrice de covariance $\mathbf{\Sigma}$ avec

$$\mathbf{m} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} 1 & r \\ r & 1 \end{pmatrix}$$

1) Quelle condition doit vérifier r pour que $\mathbf{\Sigma}$ soit une matrice symétrique définie positive ? On supposera que cette condition est vérifiée dans la suite de cet exercice.
2) Déterminer la loi du couple (Z, T) avec $Z = X - Y$ et $T = X + Y$ puis la loi de Z. Les variables Z et T sont-elles indépendantes ? (justifier votre réponse avec soin).
3) Montrer que la loi conditionnelle de X sachant $Y = y$ est une loi normale dont on précisera les paramètres.

Rappel :

$$\mathbf{\Sigma}^{-1} = \frac{1}{1 - r^2} \begin{pmatrix} 1 & -r \\ -r & 1 \end{pmatrix}$$

LOIS DE PROBABILITÉ DISCRÈTES

m : moyenne $\quad$ $\boldsymbol{\sigma}^2$: variance $\quad$ **F. C. :** fonction caractéristique

$p_k = P\left[X = k\right] \qquad p_{1,\ldots,m} = P\left[X_1 = k_1, \ldots, X_m = k_m\right]$

LOI	**Probabilités**	**m**	$\boldsymbol{\sigma}^2$	**F. C.**
Uniforme	$p_k = \frac{1}{n}$ $k \in \{1, \ldots, n\}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$	$\dfrac{e^{it}\left(1-e^{itn}\right)}{n\left(1-e^{it}\right)}$
Bernoulli	$p_1 = P\left[X=1\right] = p$ $p_0 = P\left[X=0\right] = q$ $p \in [0,1] \quad q = 1-p$	p	pq	pe^{it}
Binomiale $B\left(n,p\right)$	$p_k = C_n^k p^k q^{n-k}$ $p \in [0,1] \quad q = 1-p$ $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$	np	npq	$\left(pe^{it}+q\right)^n$
Binomiale négative	$p_k = C_{n+k-1}^{n-1} p^n q^k$ $p \in [0,1] \quad q = 1-p$ $k \in \mathbb{N}$	$n\dfrac{q}{p}$	$n\dfrac{q}{p^2}$	$\left(\dfrac{p}{1-qe^{it}}\right)^n$
Multinomiale	$p_{1,\ldots,m} = \frac{n!}{k_1!\ldots k_m!} p_1^{k_1} \ldots p_m^{k_m}$ $p_j \in [0,1] \quad q_j = 1-p_j$ $k_j \in \{0, 1, \ldots, n\}$ $\sum_{j=1}^m k_j = n \quad \sum_{j=1}^m p_j = 1$	np_j	Variance : $np_j q_j$ Covariance : $-np_j p_k$	$\left(\sum_{j=1}^m p_j e^{it}\right)^n$
Poisson $P\left(\lambda\right)$	$p_k = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$ $\lambda > 0 \quad k \in \mathbb{N}$	λ	λ	$\exp\left[\lambda\left(e^{it-1}\right)\right]$
Géométrique	$p_k = pq^{k-1}$ $p \in [0,1] \quad q = 1-p$ $k \in \mathbb{N}^*$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{q}{p^2}$	$\dfrac{pe^{it}}{1-qe^{it}}$

LOIS DE PROBABILITÉ CONTINUES

m : moyenne $\boldsymbol{\sigma}^2$: variance **F. C. :** fonction caractéristique

LOI	Densité de probabilité	m	$\boldsymbol{\sigma}^2$	F. C.
Uniforme	$f(x) = \frac{1}{b-a}$ $x \in \left]a, b\right[$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\dfrac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}$
Gamma $\Gamma(\theta, \nu)$	$f(x) = \frac{\theta^\nu}{\Gamma(\nu)} e^{-\theta x} x^{\nu - 1}$ $\theta > 0,\ \nu > 0$ $x \geq 0$	$\dfrac{\nu}{\theta}$	$\dfrac{\nu}{\theta^2}$	$\dfrac{1}{\left(1 - i\frac{t}{\theta}\right)^\nu}$
Première loi de Laplace	$f(x) = \frac{1}{2} e^{-\lvert x \rvert}$	0	2	$\dfrac{1}{1+t^2}$
Normale $\mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right)$	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$	m	σ^2	$e^{imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$
Khi$_2$ χ^2_ν $\Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{\nu}{2}\right)$	$f(x) = k e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{\nu}{2} - 1}$ $k = \dfrac{1}{2^{\frac{\nu}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}$ $\nu \in \mathbb{N}^*,\ \frown \geq \nvdash$	ν	2ν	$\dfrac{1}{(1-2it)^{\frac{\nu}{2}}}$
Cauchy $c_{\lambda, \alpha}$	$f(x) = \dfrac{1}{\pi\lambda\left(1 + \left(\frac{x-\alpha}{\lambda}\right)^2\right)}$ $\lambda > 0,\ \alpha \in \mathbb{R}$	(-)	(-)	$e^{i\alpha t - \lambda \lvert t \rvert}$
Bêta	$f(x) = k x^{a-1} (1-x)^{b-1}$ $k = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}$ $a > 0,\ b > 0,\ x \in \left]0, 1\right[$	$\frac{a}{a+b}$	$\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$	(*)