



*Partiel sans documents et sans calculatrice (une feuille manuscrite A4 est autorisée)
Les deux exercices sont indépendants*

Exercice 1

On considère la fonction $f(x, y)$ définie par

$$\begin{aligned} f(x, y) &= e^{-y} \text{ pour } 0 \leq x \leq y \\ f(x, y) &= 0 \text{ sinon} \end{aligned}$$

- 1) Déterminer les lois marginales du couple (X, Y) .
- 2) Déterminer la covariance du couple (X, Y) notée $Cov(X, Y)$.
- 3) En utilisant les résultats des questions 1) et 2), répondre à l'aide de deux méthodes différentes à la question suivante : "Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?".
- 4) Déterminer la loi de la variable aléatoire $Z = X + Y$.

Exercice 2

Soient deux variables aléatoires indépendantes X et Y de même loi normale $N(0, \sigma^2)$.

1) On peut considérer que le couple (X, Y) définit les coordonnées cartésiennes d'un point aléatoire M du plan. Soient (R, Θ) les coordonnées polaires du point M avec $r \geq 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$. Déterminer la loi du couple (R, Θ) puis les lois marginales de R et de Θ . Calculer $E[R]$, $P[R \leq 1]$ et $P[R \leq 0.2]$.

2) Préciser rapidement la loi de la variable aléatoire $\frac{X}{\sigma}$. Exprimer la probabilité

$$q = P[\{-1 \leq X \leq 1\} \cap \{-1 \leq Y \leq 1\}]$$

à l'aide de σ et de la fonction de répartition F de la loi normale $N(0, 1)$. Evaluer q pour $\sigma = \frac{1}{2}$.

3) MODELISATION

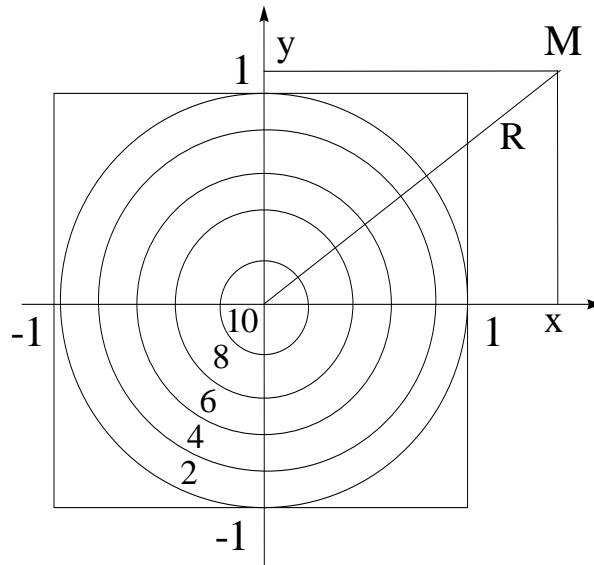
On s'intéresse aux performances d'un tireur à l'arc. Une cible est constituée de disques concentriques délimitant cinq couronnes de couleurs jaune, rouge, bleue, noire, blanche de rayons successifs: 0.2 ; 0.4 ; 0.6 ; 0.8 et 1 unité. A chacune de ces zones est attribuée respectivement 10 ; 8 ; 6 ; 4 et 2 points. La cible est dessinée sur un carton carré de 2 unités de coté. On décide de modéliser le point d'impact de la flèche par le point aléatoire M de coordonnées cartésiennes (X, Y) et de coordonnées polaires (R, Θ) . La figure 1 résume les notations. Dans ce modèle, l'indépendance des variables aléatoires X et Y s'interprète en disant que la dispersion horizontale du tir n'a pas d'influence sur sa dispersion verticale. Le choix d'une loi symétrique pour le couple (X, Y) s'interprète en disant que les points d'impact vont se répartir de façon symétrique autour du point $(0, 0)$.

a) Exprimer à l'aide de X et Y l'événement "la flèche n'atteint pas le carton" (elle est perdue dans la végétation). En déduire une expression de la probabilité p de cet événement.

b) On effectue $n = 100$ tirs. On complète notre modèle en introduisant une variable aléatoire N à valeurs dans $\{0, 1, \dots, n\}$ qui modélise le nombre de flèches perdues, chaque tir étant supposé indépendant des autres. Quelle est la loi de N ? Déterminer $E[N]$ ($E[N]$ représente en moyenne le nombre de flèches perdues).

c) On introduit une variable aléatoire K qui représente le nombre de tirs effectués avant de perdre la première flèche. Quelle est la loi de $L = K + 1$? En déduire la loi de K et $E[K]$.

d) On s'intéresse maintenant aux probabilités d'atteindre les différentes couronnes de la cible. Exprimer à l'aide de R les événements "atteindre la cible (i.e. être dans le disque de rayon maximum)" et "tirer dans le rond central". Quelle est la probabilité de ces deux événements ?



Remarques

On rappelle que la fonction Gamma définie par

$$\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} u^{t-1} e^{-u} du, \quad t > 0$$

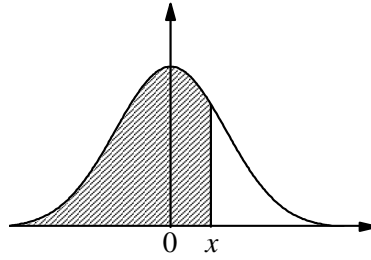
vérifie les propriétés suivantes

$$\begin{aligned} \Gamma(n+1) &= n! \\ \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) &= \frac{(2n)!}{n! 2^{2n}} \sqrt{\pi}, n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Loi Normale $N(0, 1)$

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$



x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	0.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	0.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	0.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	0.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	0.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	0.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	0.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7703	.7734	.7764	0.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	0.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	0.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	0.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	0.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	0.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	0.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	0.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	0.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	0.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	0.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	0.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	0.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	0.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	0.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	0.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	0.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	0.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	0.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	0.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	0.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	0.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	0.9985	.9986	.9986