TD3 - Probabilités et Statistiques

Couples de Variables Aléatoires Réelles

Exercice 1 : (X,Y) est un couple de variables aléatoires de densité :

$$\begin{array}{ll} f(x,y) = k \exp -\frac{x^2+y^2}{2} & (x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^- \\ f(x,y) = 0 & \text{sinon} \end{array}$$

1) Calculer k.

2) Déterminer les lois marginales de X et de Y. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

3) Calculer $\mathrm{Cov}(X,Y)$.

4) Déterminer les lois de $Z = X+Y$ et de $U = X-Y$ en fonction de $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$

5) Déterminer la loi de $T = Y/X$.

Exercice 2 **: Simulation de variables aléatoires normales. Méthode de Box-Müller.**
Soient U et V deux variables aléatoires indépendantes de mêmes lois uniformes sur $]0,1]$. On définit les variables aléatoires X et Y de la façon suivante :

$$\begin{aligned} X &= \sqrt{-2\ln U}\cos(2\pi V) \\ Y &= \sqrt{-2\ln U}\sin(2\pi V) \end{aligned}$$

Montrer que X et Y sont des variables aléatoires normales centrées réduites indépendantes. Application ?

Exercice 3 :
Soit $\theta > 0$ et $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad / \quad 0 < y < x\}$. Un couple (X,Y) de variables aléatoires réelles a pour densité :

$$\begin{array}{ll} f(x,y) = \theta^2 e^{-\theta x} & (x,y) \in D \\ f(x,y) = 0 & \text{sinon} \end{array}$$

1) Calculer les lois marginales de X et de Y.

2) Calculer la loi de $Z = Y/X$ et montrer que les variables aléatoires X et Z sont indépendantes.

Exercice 4 : On considère un couple de variables aléatoires (X, Y) où X et Y sont indépendantes et de même loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

1) Déterminer la loi du couple (R, Θ) puis les lois marginales de R et de Θ lorsque

$$\begin{cases} X = R\cos\Theta \\ Y = R\sin\Theta \end{cases}$$

Que peut on en conclure sur la dépendance des va R et Θ ?

Remarque : on dit que R suit la loi de Rayleigh et on vérifie que sa moyenne et sa variance vérifient $E[R] = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma$ et $Var[R] = \left(2 - \frac{\pi}{2}\right)\sigma^2$.

2) Mêmes questions que précédemment lorque X et Y sont deux va indépendantes de lois respectives $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ et $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. On exprimera les résultats à l'aide de la fonction de Bessel modifiée d'ordre 0

$$I_0(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{x\cos\varphi} d\varphi$$

et de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\dfrac{u^2}{2}} du$$

Remarque : on dit que R suit la loi de Rice et on vérifie que X et Y sont des va indépendantes si et seulement si $m = 0$.

Application : vous verrez plus tard que la modélisation d'un bruit blanc Gaussien centré à bande étroite conduit au signal

$$\begin{aligned} b(t) &= X(t)\cos(2\pi f_0 t) - Y(t)\sin(2\pi f_0 t) \\ &= R(t)\cos(2\pi f_0 t + \Theta) \end{aligned}$$

A chaque instant t, $R(t)$ représente l'amplitude du signal reçu dont il est important de connaître les propriétés statistiques.

Réponses

Exercice 1

Voir exercice 8 du livre p. 178 +

5) On peut effectuer un changement de variables après avoir introduit une variable auxiliaire. Mais peut-être plus simplement, on peut calculer la fonction de répartition de T:

$$P[T<t]=P\left[\frac{Y}{X}<t\right]=P[Y<tX,X>0]+P[Y>tX,X<0]$$

Puisque Y et X sont de même signe, on a $P[T<t]=0$ pour $t<0$. De plus, pour $t>0$:

$$\begin{aligned} P[T<t] &= \int_0^{+\infty}\left[\int_0^{tx} ke^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dy\right]dx+\int_{-\infty}^{0}\left[\int_{tx}^{0} ke^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dy\right]dx \\ &= 2\int_0^{+\infty} ke^{-\frac{x^2}{2}}\left[\int_0^{tx} e^{-\frac{y^2}{2}}dy\right]dx \end{aligned}$$

En dérivant par rapport à t, on obtient la densité de T :

$$\begin{aligned} f(t) &= 2\int_0^{+\infty} ke^{-\frac{x^2}{2}}\left[xe^{-\frac{t^2x^2}{2}}\right]dx \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} xe^{-\frac{\left(t^2+1\right)x^2}{2}}dx \end{aligned}$$

On obtient alors:

$$f(t)=\frac{2}{\pi}\frac{-\left[e^{-\frac{\left(t^2+1\right)x^2}{2}}\right]_0^{=\infty}}{t^2+1}=\frac{2}{\pi}\frac{1}{t^2+1}1_{\mathbb{R}^+}(t)$$

On vérifie que $\int_{R^+}\frac{2}{\pi}\frac{1}{t^2+1}dt=1$

Exercice 2

Le changement de variables se décompose comme suit :

$$\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} \sqrt{-2\ln U}=R \\ 2\pi V=\Theta \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} R\cos\Theta=X \\ R\sin\Theta=Y \end{pmatrix}$$

La première application est bijective de $]0,1]\times]0,1]$ dans $\mathbb{R}^+\times]0,2\pi]$

La deuxième application est bijective de $\mathbb{R}^+\times]0,2\pi]$ dans $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$

On a classiquement

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{X^2+Y^2} \\ \Theta &= \arctan\left[\frac{Y}{X}\right]+k\pi \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} U &= \exp\left(-\frac{X^2+Y^2}{2}\right) \\ V &= \frac{1}{2\pi}\left[\arctan\left[\frac{Y}{X}\right]+k\pi\right] \end{aligned}$$

Le jacobien de la transformation est défini par

$$J = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)}$$

D'où la densité de $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$:

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)} 1_{\mathbb{R}^2}(x,y)$$

X et Y sont donc deux variables aléatoires indépendates de lois normales $\mathcal{N}(0,1)$

Exercice 3

1) Des calculs élémentaires permettent d'obtenir :

$$\begin{aligned} f(x,.) &= \theta^2 x e^{-\theta x} 1_{\mathbb{R}^+}(x) \\ f(.,y) &= \theta e^{-\theta y} 1_{\mathbb{R}^+}(y) \end{aligned}$$

Donc Y suit une loi exponentielle de paramètre θ et X suit une loi Gamma $\Gamma(\theta,2)$.

2) On pose

$$\begin{cases} Z = \dfrac{Y}{X} \\ T = X \end{cases}$$

La changement de variables est bijectif de D dans $]0,1[\times\mathbb{R}^+$. Le Jacobien est $|J| = t$ et la densité du couple (Z,T) est

$$g(z,t) = t\theta^2 e^{-\theta t} 1_{]0,1[\times\mathbb{R}^+}(z,t)$$

Par intégration, on en déduit que Z suit une loi uniforme sur $]0,1[$ et que T suit une loi Gamma $\Gamma(\theta,2)$. Les variables Z et T sont indépendantes.

Exercice 4

1) On montre par un changement de variables standard que le couple (R,Θ) possède la densité

$$f(r,\theta) = \frac{r}{2\pi\sigma^2} e^{-\dfrac{r^2}{2\sigma^2}} 1_{\mathbb{R}^+\times]0,2\pi[}(r,\theta)$$

puis par intégration

$$\begin{aligned} f(r,.) &= \frac{r}{\sigma^2} e^{-\dfrac{r^2}{2\sigma^2}} 1_{\mathbb{R}^+}(r) \\ f(.,\theta) &= \frac{1}{2\pi} 1_{]0,2\pi[}(\theta) \end{aligned}$$

La loi de R est appelée loi de Rayleigh.

2) La densité du couple (R,Θ) est

$$g(r,\theta) = \frac{r}{2\pi\sigma^2} \exp\left\{-\frac{r^2 - 2mr\cos\theta + m^2}{2\sigma^2}\right\} 1_{\mathbb{R}^+\times]0,2\pi[}(r,\theta)$$

puis par intégration

$$
\begin{aligned}
f(r,.) &= \frac{r}{\sigma^2} e^{-\dfrac{r^2+m^2}{2\sigma^2}} I_0\left(\frac{mr}{\sigma^2}\right) 1_{\mathbb{R}^+}(r) \\
f(.,\theta) &= \frac{1}{2\pi} e^{-\dfrac{m^2}{2\sigma^2}} + \left(\frac{m\cos\theta}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right) e^{-\dfrac{r^2\sin^2\theta}{2\sigma^2}} F\left(\frac{m\cos\theta}{\sigma}\right)
\end{aligned}
$$

La loi de R est appelée loi de Rice.