TD5 - Probabilités et Statistiques

Vecteurs Gaussiens

Exercice 1:

Soit V un vecteur aléatoire gaussien à valeurs dans $\mathbb{R}^3$. Soient X_1, X_2 et X_3 les composantes de V suivant la base canonique. On suppose que X_1, X_2 et X_3 sont des variables aléatoires indépendantes de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.

1) Quelle est la densité du triplet (X_1, X_2, X_3) ?

2) Soit P la matrice de changement de base orthonormée telle que :

$$^tP = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

On note X le vecteur colonne de composantes $(X_i)_{i=1,2,3}$ et Y le vecteur colonne $Y = {}^tPX$ de composantes $(Y_i)_{i=1,2,3}$. 2.1) Quelle est la loi du triplet (Y_1, Y_2, Y_3) ? 2.2) Déterminer les lois de Y_1, Y_2 et Y_3.

3) Soit $\overline{X} = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} X_i$. Vérifier que $\sum_{i=1}^{3} X_i^2 = \sum_{i=1}^{3} Y_i^2$ et $Y_2^2 + Y_3^2 = \sum_{i=1}^{3} X_i^2 - 3\overline{X}^2$. Exprimer $\overline{X}$ et $S^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$ en fonction des variables aléatoires Y_i. En déduire que $\overline{X}$ et S^2 sont des variables aléatoires indépendantes.

4) Donner la loi de $\overline{X}$ et de $2S^2$.

Exercice 2 : Soient X, Y et Z trois variables aléatoires réelles indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

1) Déterminer la loi de $U = X + Y + Z$.

2) Montrer que $X - Y$ est indépendante de U.

Exercice 3 : Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi normale de moyenne $\mu = 0$ et de variance $\sigma^2 = 1$. Soit m un vecteur de $\mathbb{R}^2$ et Σ une matrice symétrique définie positive de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Déterminer une matrice M et un vecteur N tels que $V = M\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + N$ soit un vecteur Gaussien de $\mathbb{R}^2$ de moyenne m et de matrice de covariance Σ. Ce résultat permet de générer des vecteurs Gaussiens à partir de variables aléatoires normales centrées réduites (voir BE de probabilité).

Réponses

Exercice 1

1) (X_1, X_2, X_3) est un vecteur Gaussien de moyenne $(0,0,0)$ et de matrice de covariance I_3 (matrice identité d'ordre 3).

2) La matrice P est orthogonale car ses colonnes sont orthogonales et de norme 1. Elle est donc inversible et par suite de rang maximal 3. On sait que $Y = {}^tPX$ est un vecteur Gaussien avec

$$\begin{aligned}
m_Y &= E[Y] = E\left[{}^tPX\right] = Y = {}^tPE[X] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\Sigma_Y &= E\left[(Y - m_Y)^t (Y - m_Y)\right] \\
&= E\left[Y = {}^tPX\left({}^tX\right)P\right] = Y = {}^tPI_3P = I_3
\end{aligned}$$

Donc $Y \sim \mathcal{N}_3(0, I_3)$.

3) On a

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{3} Y_i^2 &= {}^tYY \\
&= {}^t\left({}^tPX\right)^t PX \\
&= {}^tXP^tPX = {}^tXX = \sum_{i=1}^{3} X_i^2
\end{aligned}$$

En multipliant ${}^tP$ par X, on obtient $Y_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(X_1 + X_2 + X_3) = \sqrt{3X}$. Donc

$$\begin{aligned}
Y_2^2 + Y_3^2 &= \sum_{i=1}^{3} Y_i^2 - Y_1^2 \\
&= \sum_{i=1}^{3} X_i^2 - 3\overline{X}^2
\end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned}
\overline{X} &= \frac{1}{\sqrt{3}} Y_1 \\
2S^2 &= \sum_{i=1}^{3} \left(X_i - \overline{X}\right)^2 = \sum_{i=1}^{3} Y_i^2 - 2\frac{Y_1}{\sqrt{3}}\sqrt{3}Y_1 + Y_1^2 \\
&= Y_2^2 + Y_3^2
\end{aligned}$$

Puique Y_1, Y_2 et Y_3 sont indépendantes, on en déduit que $\overline{X}$ et S^2 sont des variables aléatoires indépendantes.

4)

$$\begin{aligned}
\overline{X} &= \frac{1}{\sqrt{3}} Y_1 \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{3}\right) \\
2S^2 &\sim \chi_2^2 \text{ (loi du chi2 à 2 degrés de liberté)}
\end{aligned}$$

Exercice 2

voir exercice similaire dans le livre, p. 176, exercice 6.

Exercice 3

On sait que si $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ est un vecteur de moyenne $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et de matrice de covariance I_2 (matrice identité d'ordre 2 et que M est de rang maximal (ici de rang 2), alors $V = M \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + N$ est aussi un vecteur Gaussien de $\mathbb{R}^2$ de moyenne $M \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + N$ et de matrice de covariance $MI_3{}^tM$. On en déduit

$$\begin{aligned} N &= m \\ M^t M &= \Sigma \end{aligned}$$

Le vecteur N est donc égal à m.

La matrice M doit être de rang maximal et vérifier $M\,{}^tM = \Sigma$. Il n'y a pas unicité de la matrice M vérifiant cette égalité. Par exemple, puisque Σ est symétrique définie positive, elle est diagonalisable avec une matrice de passage unitaire P, d'où

$$M\,{}^tM = \Sigma = PD^tP$$

avec D =diag$(\sigma_1^2, ..., \sigma_n^2)$. Il suffit donc de choisir

$$M = P\left[\mathrm{diag}(\sigma_1, ..., \sigma_n)\right]$$