Probabilités et Statistiques
TD n°7

Exercice 1

On considère deux urnes A et B définies de la façon suivante:

A contient 5 boules blanches et 3 boules rouges

B contient 1 boule blanche et 2 boules rouges

On jette un dé a six faces bien équilibrées: si 1 ou 3 sortent, on tire une première boule dans A que l'on met dans B puis on tire une deuxième boule dans B, sinon on tire successivement et sans remise deux boules dans l'urne A. Dans tous les cas, on effectue deux tirages et on observe à chaque fois la couleur de la boule tirée.

1) Calculer la probabilité d'avoir une boule blanche au premier tirage

2) X est le nombre de boules blanches tirées. Quelle est la loi de X ?.

3) Sachant que la première boule est blanche, quelle est la probabilité que le 4 soit sorti ? Les événements "le dé donne 4" et "la première boule tirée est blanche" sont ils indépendants ?

4) Quelle est la probabilité que le 4 soit sorti sachant que la deuxième boule tirée est rouge ?

Exercice 2

On considère le couple (X, Y) de variables aléatoires réelles où la loi de X est définie par la densité :

$$\begin{aligned} f(x,.) &= 3x^2 \qquad \text{si } x \in [0,1] \\ f(x,.) &= 0 \qquad \text{sinon} \end{aligned}$$

et où la loi conditionnelle de Y sachant $X = x$ est la loi uniforme sur $[0, x]$ de densité

$$\begin{aligned} f(y|\,x) &= \tfrac{1}{x} \qquad \text{si } y \in [0,x] \\ f(y|\,x) &= 0 \qquad \text{sinon} \end{aligned}$$

1) Représenter le domaine sur lequel la loi conjointe du couple (X, Y) est concentrée et donner sa densité.

2) Déterminer la loi marginale de Y puis $E[Y]$ et $Var[Y]$.

3) Déterminer $Cov(X, Y)$.

4) On effectue le changement de variables $Z = X - Y, W = \frac{Y}{X}$. Donner l'ensemble de valeurs du couple (Z, W) et déterminer la densité de ce couple.

Exercice 3

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.

1) Quelle est la densité de probabilité du vecteur $(U, V) = \left(\frac{X-Y}{\sqrt{2}}, \frac{X+Y}{\sqrt{2}}\right)$? Les variables aléatoires U et V sont elles indépendantes ?

2) Quelle est la loi de la variable aléatoire $W = X^2 + Y^2$?

Exercice 4 :

Soit X une variable aléatoire de loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$ et Y une variable aléatoire binaire prenant les valeurs $+1$ et -1 avec $P[Y = 1] = P[Y = -1] = \frac{1}{2}$. On suppose que X et Y sont indépendantes et on pose $Z = XY$.

1) Déterminer la loi de Z

2) Déterminer $Cov(X, Z)$

3) Calculer $P[X + Z = 0]$ et en déduire que X et Z ne sont pas indépendantes.

Exercice 5
Soit X une variable aléatoire réelle à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que :

$$P[X=n] = pq^{n-1} \qquad n \in \mathbb{N}^*, p+q=1$$

Pierre et Marie jouent au jeu suivant : une partie consiste à tirer un entier $n > 0$ selon la loi de X. Si n est impair, Marie donne 1 franc à Pierre. Si n est pair, Pierre donne 1 franc à Marie. On note G_i le gain de Pierre au cours de la $i^{ème}$ partie (on tire un nouvel entier n à chaque nouvelle partie et indépendamment des autres parties) :

$$G_i = 1 \text{ si Pierre gagne}$$
$$G_i = -1 \text{ si Marie gagne}$$

Déterminer $E[G_i]$ et $Var(G_i)$. Pierre et Marie effectuent K parties. Quelle est la loi de $U = \sum_{i=1}^{K} \frac{G_i+1}{2}$? En déduire le gain moyen de Pierre après K parties soit $E[G] = E\left[\sum_{i=1}^{K} G_i\right]$. Quel est le gain moyen de Pierre lorsque le nombre de parties K est aléatoire (par exemple de loi de Poisson de paramètre λ) ?

Exercice 6

Soit $\theta > 0$ et $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad / \quad 0 < y < x\right\}$. Un couple (X,Y) de variables aléatoires réelles a pour densité :

$$\begin{array}{ll} f(x,y) = \theta^2 e^{-\theta x} & (x,y) \in D \\ f(x,y) = 0 & \text{sinon} \end{array}$$

1) Calculer les lois marginales de X et de Y.
2) Calculer la loi de $Z = Y/X$ et montrer que les variables aléatoires X et Z sont indépendantes.