EXAMEN TRAITEMENT DU SIGNAL - SIGNAUX ALÉATOIRES - 2 EN

Jeudi 20 Novembre 2014 (8h-9h00)

Partiel sans document (Une feuille A4 recto-verso autorisée)

Exercice 1: Filtre exponentiel

On considère un filtre non-linéaire dit exponentiel qui transforme un signal aléatoire $X(t)$ en un signal aléatoire $Y(t)$ tel que

$$Y(t) = \exp[X(t)].$$

On supposera dans cet exercice que $X(t)$ est un signal Gaussien stationnaire de moyenne nulle et de fonction d'autocorrélation $r_X(\tau)$.

1. Qu'est-ce qu'un signal Gaussien ? Justifier brièvement le fait que $Y(t)$ est un signal aléatoire stationnaire.

2. On rappelle que la fonction génératrice des moments d'une variable aléatoire Z de loi normale $N(0, \sigma^2)$ est

$$m(u) = E\left[e^{uZ}\right] = \exp\left(\frac{\sigma^2}{2}u^2\right).$$

En déduire $E[Y(t)]$ et $E\left[Y^2(t)\right]$.

3. Déterminer la fonction d'autocorrélation de $Y(t)$ en fonction de celle de $X(t)$.

Exercice 2: Formule de Benett

1. On considère une suite de variables aléatoires binaires a_k telles que $P[a_k = 0] = p$ et $P[a_k = 1] = 1 - p$ avec $0 < p < 1$. Déterminer la moyenne et la variance de a_k.

2. On forme le signal

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta(t - kT)$$

que l'on filtre à l'aide d'un filtre F_h de réponse impulsionnelle $h(t)$, où $h(t)$ est une fonction déterministe à énergie finie de support l'intervalle $[-T/2, T/2]$ avec $T > 0$ (i.e., $h(t) = 0$ si $t \notin [-T/2, T/2]$. Déterminer l'expression de la sortie du filtre $y(t) = F_h[X(t)]$ en fonction de h et des variables aléatoires a_k. Représenter une réalisation de $y(t)$ dans le cas où

$$h(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } 0 < t < T/2 \\ -1 \text{ si } -T/2 < t < 0 \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

3. Montrer que la fonction h définie ci-dessus est à énergie finie et déterminer sa densité spectrale de puissance $s_h(f)$. On notera $r_h(\tau)$ sa fonction d'autocorrélation qu'on ne demande pas de déterminer pour cet exemple.

4. Déterminer la moyenne du signal $y(t)$. Le signal $y(t)$ est-il stationnaire ?

5. On introduit une variable aléatoire θ uniforme sur l'intervalle $[0, T]$ et indépendante des variables aléatoires a_k. On forme le signal

$$z(t) = y(t - \theta).$$

- Montrer que la moyenne de $z(t)$ s'écrit

$$E[z(t)] = \frac{(1-p)H(0)}{T}$$

où $H(f) = \text{TF}\,[h(t)]$ est la transformée de Fourier de $h(t)$.

- Montrer que la fonction d'autocorrélation de $z(t)$ s'écrit

$$r_z(\tau) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} r_a(k) r_h(\tau - kT)$$

où $r_a(k) = E[a_n a_{n-k}]$ et où $r_h(\tau)$ est la fonction d'autocorrélation de $h(t)$.

- Quel est l'intérêt d'avoir introduit une phase aléatoire θ dans la définition de $z(t)$?
- Déterminer la densité spectrale de puissance de $z(t)$ en fonction de T, $H(f)$ et de

$$s_a(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} r_a(k) e^{-j2\pi kTf}.$$

Exercice 1

1) Signal Gaussien stationnaire 1pt

2) $E[Y(t)] = E[e^{X(t)}] = m(1) = e^{\sigma^2/2}$

$E[Y^2(t)] = E[e^{2X(t)}] = m(2) = e^{2\sigma^2}$ 1pt

3) $\frac{\partial R_Y}{\partial R_X} = E[Y_t Y_{t-\tau}] = R_Y(\tau)$

$\frac{\partial R_Y}{\partial R_Y} = \partial R_X \Rightarrow \ln R_Y = R_X + C$ 1pt

$\Rightarrow \boxed{R_Y = e^{R_X(\tau)} \times K}$

4) $R_Y(0) = E[Y^2(t)] = e^{2\sigma^2} = e^{\sigma^2} K$ 1pt

$\boxed{K = e^{\sigma^2}}$

$\boxed{R_Y(\tau) = \exp[\sigma^2 + R_X(\tau)]}$

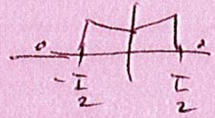
4p5

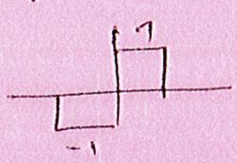
Ex2

1) $a_k \to 0 \quad p$ $\quad E[a_k] = 1-p$ 1pt

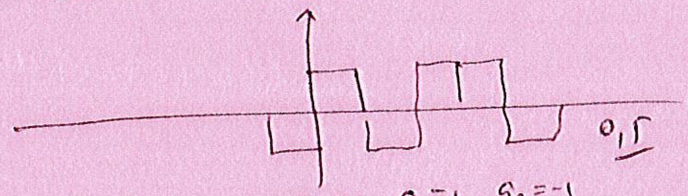
$\quad \to 1 \quad 1-p$ $\quad E[a_k^2] - E[a_k]^2 = (1-p)(p)$

2) $x(t) = \sum_k a_k \delta(t-kT)$ — $h(t)$ — $y(t)$





$\boxed{y(t) = \sum_k a_k h(t-kT)}$ 0,5 1pt



0,5 ~~1pt~~

$a_0 = 1 \quad a_1 = 1 \quad a_2 = -1$

4p5

3) $\int h^2(t)\,dt = T < +\infty$ 0,5

$S_h(f) = |H(f)|^2 = \left|TF\left[\Pi_{T/2}\left(t - \frac{T}{4}\right) - \Pi_{T/2}\left(t + \frac{T}{4}\right)\right]\right|^2$

$= \left| e^{-j\pi f T/2} \frac{T}{2} \operatorname{sinc}\left(\pi \frac{T}{2} f\right) - e^{j\pi f T/2} \right|^2$

$S_h(f) = \boxed{T^2 \operatorname{sinc}^2\left(\pi \frac{T}{2} f\right) \sin^2\left(\frac{\pi T}{2} f\right)}$ 1pt

4) $E[Y(t)] = (1-p) \sum_k h(t-kT)$ dépend de $t \Rightarrow$ non stat ~~1pt~~ 0,5pt

---

5) $E[Z(t)] = (1-p) \sum_k E[h(t-kT-\theta)]$

$\bullet \quad E[z(t)] = (1-p) \sum_k \underbrace{E[h(t-kT-\theta)]}_{\int_0^T \frac{1}{T} h(t-kT-\theta)\, d\theta}$

$$= \frac{1-p}{T} \sum \int_{t-kT}^{t-(k+1)T} h(u)\,(-du) = \frac{1-p}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} h(u)\, du \qquad (1pt)$$

$u = t-kT-\theta$

$\theta = t-kT-u \qquad = \frac{1-p}{T} H(0)$

$\bullet \quad E[z(t)\,z(t-\tau)] = E\left[\sum_k a_k h(t-kT-\theta) \sum_\ell a_\ell h(t-\tau-kT-\theta) \right]$

$$= \sum_k \sum_\ell E[a_k a_\ell]\, \underbrace{E[h(t-kT-\theta)\,h(t-\tau-\ell T-\theta)]}$$

$$= \quad r_a(k-\ell) \quad \underbrace{\int_0^T \frac{1}{T} h(t-kT-\theta)\, h(t-\tau-\ell T-\theta)\, d\theta}$$

$u = t-kT-\theta \qquad (4pts)$

$t-\tau-\ell T-\theta = \cancel{t}-\tau-\ell T+u\cancel{-t}+kT \quad \frac{1}{T}\int_{t-(k+1)T}^{t-kT} h(u)\, h(\cancel{u-\tau})\, du$

$= u + \cancel{(k-\ell-1)}T \qquad \cancel{h(u+(k-\ell+1)T)}$

$(k-\ell)T-\tau \qquad h(u+(k-\ell)T-\tau$

$$= \cancel{\sum_{k=-\infty}^{+\infty}} \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} \left[\sum_{i=-\infty}^{+\infty} r_a(i) \frac{1}{T} \int_{t-\underline{(k+1)T}_{(i+\ell+1)T}}^{t-\cancel{kT}(i+\ell)T} h(u)\, h(u+iT-\tau)\, du \right.$$

$i = k-\ell \Rightarrow k = (i+\ell)\cancel{T}$

$$= \cancel{\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \frac{r_a(i)}{T}} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \frac{r_a(i)}{T} \underbrace{\sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} -}_{\int_{-\infty}^{+\infty} h(u)\, h(u+iT-\tau)\, du = r_h(\tau-iT)}$$

$$\boxed{R_z(\tau) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} r_a(k)\, r_h(\tau-kT)} \qquad (2pts)$$

$\bullet$ stationnaire le signal (0.5pt)

$\bullet \quad S_z(f) = \frac{1}{T} \sum_k r_a(k)\, e^{-j2\pi kfT} S_h(f) = \boxed{\frac{S_h(f)\, S_a(f)}{T}}$ (0.5pt) (1pt)