EXAMEN TRAITEMENT DU SIGNAL - SIGNAUX ALÉATOIRES - 2 EN

Jeudi 19 Novembre 2015

Partiel sans document (Une feuille A4 recto-verso autorisée)

Exercice 1 : Signal sinusoidal (2 points)

On considère un signal $x(t)$ défini par

$$x(t) = A\cos(\pi f_0 t)$$

avec $A > 0$ et $f_0 > 0$ (deux constantes). Quelle est la classe du signal $x(t)$? (Est-il aléatoire, déterministe à énergie finie, déterministe à puissance finie périodique ou déterministe à puissance finie non-périodique ?). En déduire la fonction d'autocorrélation $R_x(\tau)$ et la densité spectrale de puissance $s_x(f)$ de ce signal. Que représente $R_x(0)$?

Exercice 2 (2 points)

Soit A une variable aléatoire de loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ (de moyenne m et de variance σ^2). Soit ϕ une variable aléatoire uniforme sur l'intervalle $[0, 2\pi[$ indépendante de A. Répondre aux questions de l'exercice précédent avec le signal défini par

$$x(t) = Ae^{j\phi t}.$$

Exercice 3 : Moyennage temporel (2 points)

On considère un signal aléatoire stationnaire $x(t)$ de moyenne $E[x(t)] = m$, de fonction d'autocorrélation $R_x(\tau)$ et de densité spectrale de puissance $s_x(f)$ et on considère le signal $y(t)$ défini par

$$y(t) = \frac{1}{2a}\int_{t-a}^{t+a} x(u)du$$

avec $a > 0$ (une constante). Le signal $y(t)$ est-il obtenu par filtrage linéaire de $x(t)$? Si oui, préciser la réponse impulsionnelle et la transmittance de ce filtre. On suppose que $x(t)$ est un bruit blanc de densité spectrale de puissance $s_x(f) = 1$. Déterminer la densité spectrale de puissance et la fonction d'autocorrélation du signal $y(t)$.

Exercice 4 : Signal des télégraphistes (2 points)

Soit A une variable aléatoire prenant les valeurs $+a$ et $-a$ (où $a > 0$ est une constante) avec les probabilités $p = 1/2$ et $q = 1/2$. Soit $X(t)$ un signal aléatoire construit à partir d'un processus de Poisson homogène de paramètre λ tel que $X(0) = A$, et pour tout $t > 0$, $X(t) = A$ si le nombre d'instants dans l'intervalle $[0, t[$ (noté $N(0, t)$ dans le cours) est pair et $X(t) = -A$ si ce nombre d'instants est impair. On suppose que les variables aléatoires A et $N(t, \tau)$ sont indépendantes $\forall(t, \tau)$. Déterminer $P[X(t) = a]$, puis la moyenne et la fonction d'autocorrélation du signal $X(t)$.

Rappel : On rappelle que la variable aléatoire $N(t, \tau)$ qui est le nombre d'instants dans l'intervalle $[t, t + \tau[$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda|\tau|$, c'est-dire que

$$P[N(t, \tau) = k] = \frac{(\lambda|\tau|)^k}{k!}\exp(-\lambda|\tau|), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Exercice 5 : Questions de cours (2 points)

Répondre avec précision aux questions ci-dessous

1. Qu'est ce qu'un bruit blanc ? (donner la densité spectrale de puissance et la fonction d'autocorrélation d'un tel signal)
2. Qu'est ce qu'un bruit gaussien ? (quelle est la densité de probabilité de $X_1 = [x(t_1), ..., x(t_n)]^T$ pour un tel signal ?)
3. Qu'est ce qu'un filtre anti-repliement ? Est-il analogique ou numérique ?
4. Qu'est ce que l'interpolateur de Shannon ? Quel est son intérêt ?

Transformée de Fourier

$$X(f) = \int_{\mathbb{R}} x(t)e^{-i2\pi ft}dt \qquad x(t) = \int_{\mathbb{R}} X(f)e^{i2\pi ft}df$$

T.F.

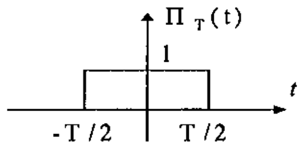
$x(t)$ réelle paire	$\rightleftharpoons$	$X(f)$ réelle paire
$x(t)$ réelle impaire	$\rightleftharpoons$	$X(f)$ imaginaire pure impaire
$x(t)$ réel	$\rightleftharpoons$	$\begin{cases} \mathrm{Re}\{X(f)\} \text{ paire} \\ \mathrm{Im}\{X(f)\} \text{ impaire} \\ \lvert X(f)\rvert \text{ pair} \\ \arg\{X(f)\} \text{ impaire} \end{cases}$
$ax(t) + by(t)$	$\rightleftharpoons$	$aX(f) + bY(f)$
$x(t - t_0)$	$\rightleftharpoons$	$X(f)e^{-i2\pi ft_0}$
$x(t)e^{+i2\pi f_0 t}$	$\rightleftharpoons$	$X(f - f_0)$
$x^*(t)$	$\rightleftharpoons$	$X^*(-f)$
$x(t) \,.\, y(t)$	$\rightleftharpoons$	$X(f) * Y(f)$
$x(t) * y(t)$	$\rightleftharpoons$	$X(f) \,.\, Y(f)$
$x(at)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}X\left(\frac{f}{a}\right)$
$\frac{dx^{(n)}(t)}{dt^n}$	$\rightleftharpoons$	$(i2\pi f)^n X(f)$
$(-i2\pi t)^n x(t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{dX^{(n)}(f)}{df^n}$

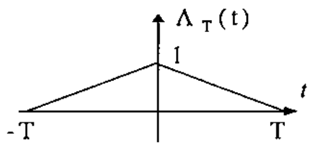
Formule de Parseval
$\int_{\mathbb{R}} x(t)y^*(t)dt = \int_{\mathbb{R}} X(f)Y^*(f)df$
$\int_{\mathbb{R}} \lvert x(t)\rvert^2 dt = \int_{\mathbb{R}} \lvert X(f)\rvert^2 df$

Série de Fourier
$x(t) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{+i2\pi nf_0 t} \rightleftharpoons X(f) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n \delta(f - nf_0)$
avec $c_n = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)e^{-i2\pi nf_0 t}dt$

T.F.

1	$\rightleftharpoons$	$\delta(f)$
$\delta(t)$	$\rightleftharpoons$	1
$e^{+i2\pi f_0 t}$	$\rightleftharpoons$	$\delta(f - f_0)$
$\delta(t - t_0)$	$\rightleftharpoons$	$e^{-i2\pi ft_0}$
$\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \delta(t - kT)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{T}\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$
$\cos(2\pi f_0 t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{2}\left[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)\right]$
$\sin(2\pi f_0 t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{2i}\left[\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)\right]$
$e^{-a\lvert t\rvert}$	$\rightleftharpoons$	$\frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 f^2}$
$e^{-\pi t^2}$	$\rightleftharpoons$	$e^{-\pi f^2}$
$\Pi_T(t)$	$\rightleftharpoons$	$T\frac{\sin(\pi Tf)}{\pi Tf} = T\sin c(\pi Tf)$
$\Lambda_T(t)$	$\rightleftharpoons$	$T\sin c^2(\pi Tf)$
$B\sin c(\pi Bt)$	$\rightleftharpoons$	$\Pi_B(f)$
$B\sin c^2(\pi Bt)$	$\rightleftharpoons$	$\Lambda_B(f)$





!!!!!! Attention !!!!!
$\Pi_T(t)$ est de support égal à T.
$\Lambda_T(t)$ est de support égal à $2T$
et on a $\Pi_T(t) * \Pi_T(t) = T\ \Lambda_T(t)$

$$\begin{aligned}
\delta(t) &= \begin{cases} 0 \text{ si } t \neq 0 \\ +\infty \text{ si } t = 0 \end{cases} \quad \text{et} \int_{\mathbb{R}} \delta(t)\,dt = 1 \\
\delta(t - t_0)\,f(t) &= \delta(t - t_0)\,f(t_0) \\
\delta(t - t_0) * f(t) &= f(t - t_0)
\end{aligned}$$

3

1

Ex1

$x(t)$ est un signal périodique de fréquence $\frac{f_0}{2}$ et de période $2T_0$ (0,5)

Sa fonction d'autocorrélation est donc définie par

$$R_x(\tau) = \frac{1}{2T_0}\int_{-T_0}^{T_0} x(t)\,x(t-\tau)\,dt$$

$$= \frac{1}{2T_0}\int_{-T_0}^{T_0} A^2 \underbrace{\cos(\pi f_0 t)\cos(\pi f_0(t-\tau))}_{\frac{1}{2}\cos(2\pi f_0 t - \pi f_0 \tau) + \frac{1}{2}\cos(\pi f_0 \tau)}\,dt$$

La première intégrale est nulle d'où

$$\boxed{R_x(\tau) = \frac{A^2}{2}\cos(\pi f_0 \tau)}$$ (0,5)

La densité spectrale de puissance est

$$S_x(f) = TF[R_x(\tau)] = \frac{A^2}{2} TF[\cos 2\pi \left(\frac{f_0}{2}\right)\tau]$$

$$= \frac{A^2}{2}\,\frac{1}{2}\left[\delta\left(f-\frac{f_0}{2}\right) + \delta\left(f+\frac{f_0}{2}\right)\right]$$

Soit

$$\boxed{S_x(f) = \frac{A^2}{4}\left[\delta(f-f_0/2) + \delta(f+f_0/2)\right]}$$ (0,5)

$R_x(0) = \frac{A^2}{2}$ est la puissance moyenne du signal $x(t)$ (0,5)

Ex2

Le signal $x(t)$ est un signal aléatoire - Sa fonction d'autocorrélation est définie par

$$R_x(t) = E[A^2 e^{j\phi t}\, e^{-j\phi(t-\tau)}] = E[A^2 e^{+j\phi\tau}]$$

Comme A et ϕ sont des va indépendantes, on a

$$R_x(\tau) = E[A^2]\,E[e^{j\phi\tau}] = (m^2+\sigma^2)\,E[e^{j\phi\tau}]$$

Mais $$E[e^{j\phi\tau}] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{j\phi\tau}\,d\phi = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{j\phi\tau}}{j\tau}\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{j2\pi\tau}\left(e^{j2\pi\tau}-1\right) = \frac{e^{j\pi\tau}}{\pi\tau}\,\frac{e^{j\pi\tau}-e^{-j\pi\tau}}{2j}$$

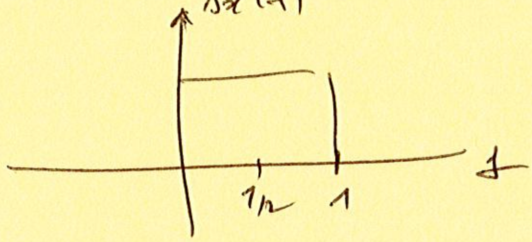
et donc $E\left[e^{j\phi\tau}\right] = \frac{e^{j\pi\tau}}{\pi\tau}\sin(\pi\tau) = \boxed{e^{j\pi\tau}\,\mathrm{sinc}(\pi\tau)}$

d'où $\boxed{R_x(\tau) = (m^2+\sigma^2)\, e^{j\pi\tau}\,\mathrm{sinc}(\pi\tau)}$ 1

$S_x(f) = (m^2+\sigma^2)\ TF\left[e^{j\pi\tau}\right] * TF\left[\mathrm{sinc}(\pi\tau)\right]$

$= (m^2+\sigma^2)\ \delta(f-\tfrac{1}{2}) * \Pi_1(f)$

$\boxed{S_x(f) = (m^2+\sigma^2)\ \Pi_1(f-1/2)}$ 1



$R_x(0) = (m^2+\sigma^2)$ est la puissance moyenne du signal $x(t)$

Ex3

$$y(t) = \frac{1}{2a}\int_{t-a}^{t+a} x(u)\,du$$

Paramètre fondamentale $x(t) \to e^{j2\pi ft}$

$$y(t) \to \frac{1}{2a}\int_{t-a}^{t+a} e^{j2\pi fu}\,du$$

$$= \frac{1}{2a}\left[\frac{e^{j2\pi fu}}{j2\pi f}\right]_{t-a}^{t+a}$$

$$= \frac{1}{2a}\, e^{j2\pi ft}\,\frac{e^{j2\pi fa} - e^{-j2\pi fa}}{j2\pi f}$$

$$= \frac{1}{2a}\, e^{j2\pi ft}\,\frac{\sin(2\pi fa)}{\pi f}$$

On en déduit $y(t) \longleftrightarrow e^{j2\pi f t} \underbrace{\text{sinc}\,(2\pi f a)}_{\text{ind det}}$

$y(t)$ est donc obtenu par filtrage linéaire de $x(t)$ (0,5)

avec un filtre de transmittance $H(f) = \text{sinc}\,(2\pi f a)$ (0,5)

et de réponse impulsionnelle $h(t) = TF^{-1}(H(f)) = \frac{1}{2a}\Pi_{2a}(t)$ (0,5)

D'après la relation de Wiener Lee

$$S_y(f) = S_x(f)\,|H(f)|^2 = \text{sinc}^2(2\pi f a)$$

$$R_y(t) = TF^{-1}[S_y(f)] = \frac{1}{2a}\Lambda_{2a}(\tau)$$

(0,5)

Ex4 Cet exercice a été fait en cours

Moyenne de $X(t)$

$X(t)$ prend les valeurs a et $-a$ avec les probabilités $1/2$ et $1/2$

car $P[X(t)=a] = P[X(0)=a$ et $N(0,t)$ pair
ou
$X(0)=-a$ et $N(0,t)$ impair $]$

$$= \underbrace{P[A=a]}_{1/2}\,P[N(0,t)\text{ pair}] + \underbrace{P[A=-a]}_{1/2}\,P[N(0,t)\text{ impair}]$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$\text{d'où } E[X(t)] = a\,P[X(t)=a] + (-a)\,\overbrace{P[X(t)=-a]}^{1-P[X(t)=a]}$$

$$= 2a\,P[X(t)=a] - a$$

$$= a\left[2\times\frac{1}{2} - 1\right] = 0$$

(0,5)

(4)

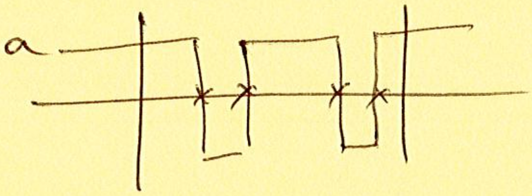
La fonction d'autocorrélation du signal $X(t)$ est

$$E[X(t)X(t-\tau)] = a^2 P[X(t)X(t-\tau) = a^2] + (-a^2) P[X(t)X(t-\tau) = -a^2]$$

$$= 2a^2 P[X(t)X(t-\tau) = a^2] - a^2$$

Mais

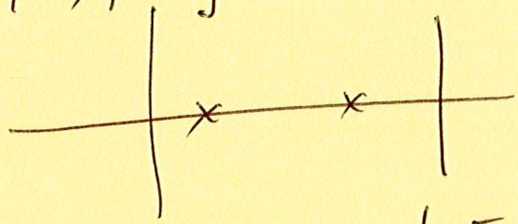
$$P[X(t)X(t-\tau) = a^2] = \begin{cases} P[N(t-\tau,\tau) \text{ pair}] & \text{si } \tau > 0 \\ P[N(t,-\tau) \text{ pair}] & \text{si } \tau < 0 \end{cases}$$



$t-\tau$ $\qquad$ t

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{N(t-\tau,\,\tau)}$$

$\tau > 0$



t $\qquad$ $t-\tau$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{N(t,\,-\tau)}$$

$\tau < 0$

$$= P[N(t,|\tau|) \text{ pair}]$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \underbrace{P[N(t,|\tau|) = 2k]}_{\frac{(\lambda|\tau|)^{2k}}{(2k)!} e^{-\lambda|\tau|}}$$

$$= e^{-\lambda|\tau|} \, \frac{e^{\lambda|\tau|} + e^{-\lambda|\tau|}}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + e^{-2\lambda|\tau|}\right)$$

On en déduit $\boxed{R_X(\tau) = a^2 \left[e^{-2\lambda|\tau|} \right]}$ (1)

$$S_X(f) = TF[R_X(\tau)] = \frac{a^2 \lambda}{\lambda^2 + 4\pi^2 f^2}$$ (0,5)

Ex5 1) Un bruit blanc est un signal aléatoire $x(t)$ stationnaire (1)

dont la densité spectrale de puissance est constante, i.e.,

$$S_x(f) = K \quad \forall f$$ (0,5)

Sa fonction d'autocorrélation s'écrit donc

$$R_x(\tau) = K\, \delta(\tau)$$

2) Un bruit Gaussien est un signal aléatoire $x(t)$ tel que $(x(t_1), \dots, x(t_n))$ suit une loi normale $\forall (t_1, \dots, t_n)$

de densité

$$p(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{\det \Sigma}} \exp\left[-\frac{1}{2}(x-m)^T \Sigma^{-1}(x-m)\right]$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$ (0,5)

où $m = \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur moyenne et

$\Sigma \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique (définie positive)

appelée matrice de covariance

3) Un filtre anti-repliement est un filtre analogique qui permet de limiter la bande d'intérêt d'un signal que l'on cherche à échantillonner. Si on sait que les fréquences d'intérêt d'un signal est $[0, B]$, on va avant échantillonnage filtrer ce signal avec un filtre de support $[0, B]$ de manière à éviter que certains "hauts fréquences" liés par exemple au bruit ne se replient dans la bande d'intérêt.

4) La formule d'interpolation de Shannon est

$$x_r(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x(kT_e)\, \mathrm{sinc}\left[\pi F_e (t - kT_e)\right]$$

Elle permet de reconstruire un signal continu à partir des points $\{x(kT_e),\ k \in \mathbb{Z}\}$. Cette reconstruction est sans erreur si on respecte le théorème de Shannon