EXERCICE CLASSIFICATION

En communications numériques, on veut transmettre un symbole x binaire défini par :

Classe 1 : $x = 0$
Classe 2 : $x = 1$

Le symbole émis x passe par un canal de transmission, où il est perturbé par un bruit n supposé blanc Gaussien centré de variance σ^2. Le signal reçu est alors $z = x + n$. Le problème est de retrouver le symbole émis à partir du signal reçu.

1. Enoncez la règle de décision Bayésienne lorsque les deux valeurs 0 et 1 ont la même probabilité d'apparition. Calculer la probabilité d'erreur correspondante que l'on exprimera à l'aide de la fonction de répartition de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ définie par

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du.$$

   Montrer que cette probabilité d'erreur tend vers 0 lorsque σ tend vers 0. Expliquer ce résultat.

2. Comment la règle de décision Bayésienne est modifiée si les deux valeurs $x = 0$ et $x = 1$ ont des probabilités d'apparition notées P_0 et P_1 ? Interpréter ce résultat lorsque $P_0 > P_1$.

3. On envoie N fois le même symbole x et on reçoit $z_i = x + n_i$. En supposant que les variables aléatoires $n_1, ..., n_N$ sont indépendantes, quelle est la règle de décision Bayésienne dans le cas de deux symboles équiprobables ?

1) <u>classe 1</u> $x=0$ donc $z = n \sim N(0,\sigma^2)$
<u>classe 2</u> $x=1$ donc $z = 1+n \sim N(1,\sigma^2)$

<u>Règle de Bayes</u>

$$d^*(z) = \omega_1 \iff P(\omega_1 | z) \geq P(\omega_2 | z)$$

$$\iff \frac{P(z|\omega_1)\, P(\omega_1)}{\cancel{P(z)}} \geq \frac{P(z|\omega_2)\, P(\omega_2)}{\cancel{P(z)}}$$

Comme $P(\omega_1) = P(\omega_2)$, on a

$$d^*(z) = \omega_1 \iff \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma^2}\right) \geq \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(z-1)^2}{2\sigma^2}\right]$$

$$d^*(z) = \omega_1 \iff z^2 \leq (z-1)^2 \iff \boxed{z \leq \frac{1}{2}}$$

<u>Probabilité d'erreur</u>

$$P_e = P[\, d^*(z) = \omega_1 \text{ et } z \in \omega_2] + P[\, d^*(z) = \omega_2 \text{ et } z \in \omega_1]$$

$$= P[\, z \leq \tfrac{1}{2} \mid z \in \omega_2]\, P(\omega_2) + P[\, z > \tfrac{1}{2} \mid z \in \omega_1]\, P(\omega_1)$$

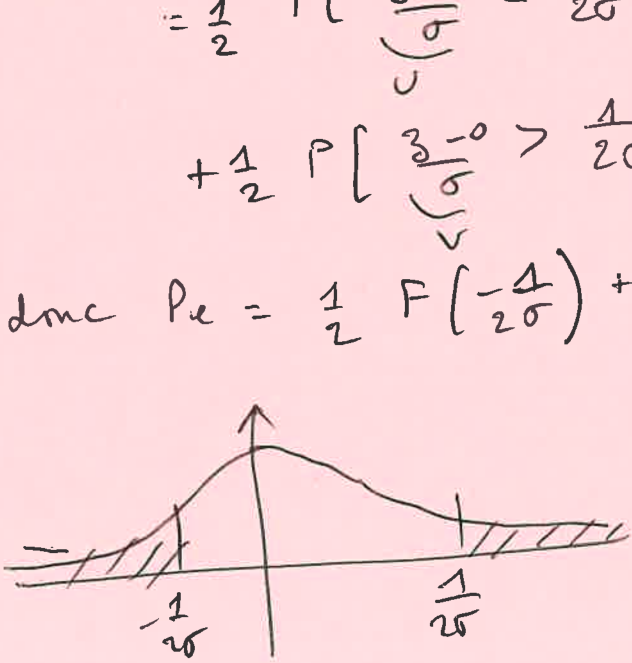
$$= \frac{1}{2} P[\, z \leq \tfrac{1}{2} \mid z \sim N(1,\sigma^2)] + \frac{1}{2} P[\, z > \tfrac{1}{2} \mid z \sim N(0,\sigma^2)]$$

$$= \frac{1}{2} P\Big[\, \underbrace{\frac{z-1}{\sigma}}_{v} \leq -\frac{1}{2\sigma} \;\Big|\; v \sim N(0,1)\Big]$$

$$+ \frac{1}{2} P\Big[\, \underbrace{\frac{z-0}{\sigma}}_{v} > \frac{1}{2\sigma} \;\Big|\; v \sim N(0,1)\Big]$$

donc $P_e = \frac{1}{2} F\left(-\frac{1}{2\sigma}\right) + \frac{1}{2} F\left(-\frac{1}{2\sigma}\right)$

donc $\boxed{P_e = F\left(-\frac{1}{2\sigma}\right)}$



On remarque que $-\frac{1}{2\sigma} \xrightarrow[\sigma\to 0^+]{} -\infty$ donc $P_e = F\left(-\frac{1}{2\sigma}\right) \xrightarrow[\sigma \to 0]{} 0$ (2)

quand il n'y a pas de bruit, on reconnait sans erreur les deux symbols $x=0$ et $x=1$

2) d'après 1), on a

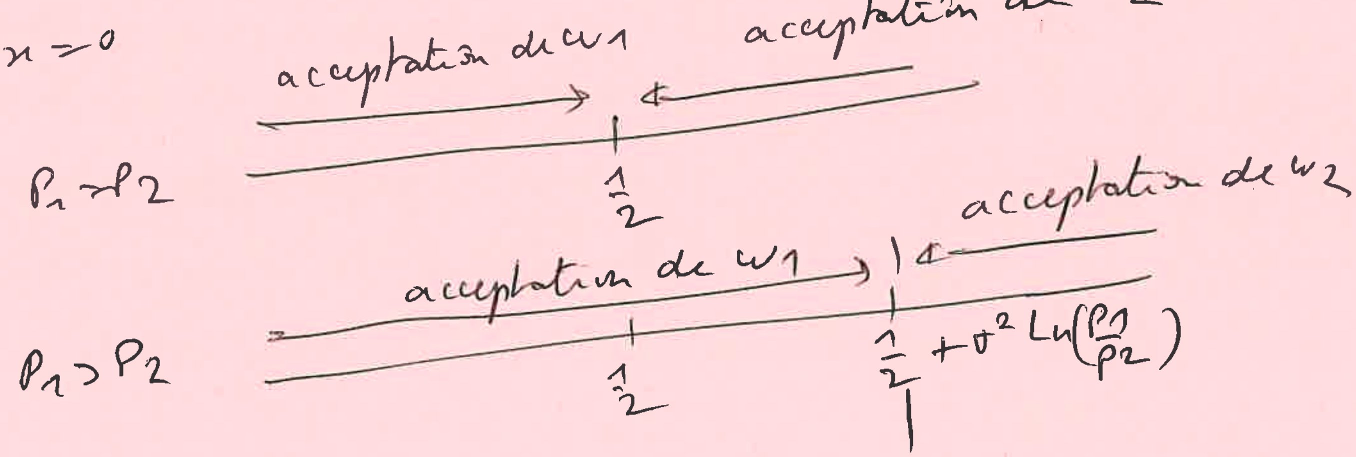
$$d^*(z)=w_1 \iff P_1 \exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma^2}\right) \geq P_2 \exp\left(-\frac{(z-1)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$\iff \ln P_1 - \cancel{\frac{z^2}{2\sigma^2}} \geq \ln P_2 - \frac{1}{2\sigma^2}(\cancel{z^2}-2z+1)$$

$$\iff \sigma^2 \ln\left(\frac{P_1}{P_2}\right) \geq z - \frac{1}{2}$$

$$\iff \boxed{z \leq \frac{1}{2} + \sigma^2 \ln\left(\frac{P_1}{P_2}\right)}$$

Lorsque $P_2 > P_2$ le symbole $x=0$ est plus probable que le symbole $x=1$ donc on accepte plus souvent $x=0$



3) $d^*(z_1,\dots,z_N)=w_1 \iff P(z_1,\dots,z_N | w_1) \geq P(z_1 \dots z_N | w_2)$

$$\iff \prod_{i=1}^{N} \cancel{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}} \exp\left(-\frac{z_i^2}{2\sigma^2}\right) \geq \prod_{i=1}^{N} \cancel{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}} \exp -\frac{(z_i-1)^2}{2\sigma^2}$$

$$\iff -\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{N} z_i^2 \geq -\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{N}(z_i-1)^2$$

$$\iff 0 \geq -\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{N}(-2z_i+1) = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{N}\left(z_i-\frac{1}{2}\right)$$

soit $d^*(z_1, \dots, z_N) = w_1 \iff \sum_{i=1}^{N} z_i - \frac{N}{2} \leq 0$

$$\iff \boxed{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} z_i \leq \frac{1}{2}}$$

, pour $N = 1$, on retrouve bien la règle précédente