EXAMEN TRAITEMENT DU SIGNAL - 1SN

Lundi 19 février 2024 - 8h00

Partiel sans document (Une feuille A4 recto-verso autorisée)

Exercice 1 (3 **points**)

On considère le signal aléatoire complexe

$$X(t) = Ae^{i\lambda t} + Be^{i\mu t}$$

où A et B sont deux variables aléatoires à valeurs réelles de moyennes nulles, de variances égales à 1 et de covariance nulle, i.e., $\text{cov}(A, B) = E[AB] - E[A]E[B] = E[AB] = 0$, et où $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$ sont deux constantes telles que $\lambda \neq \mu$. Déterminer la moyenne, la fonction d'autocorrélation et la densité spectrale de puissance de $X(t)$.

La moyenne de $X(t)$ est

$$E[X(t)] = E[A]e^{i\lambda t} + E[B]e^{i\mu t} = 0.$$

La fonction d'autocorrélation de $X(t)$ est

$$\begin{aligned} E[X(t)X^*(t-\tau] =& E\left[\left(Ae^{i\lambda t} + Be^{i\mu t}\right)\left(Ae^{-i\lambda(t-\tau)} + Be^{-i\mu(t-\tau)}\right)\right] \\ =& E[A^2]e^{i\lambda\tau} + E[B^2]e^{i\mu\tau} + E[AB]\left(e^{i\lambda t}e^{-i\mu(t-\tau)} + e^{i\mu t}e^{-i\lambda(t-\tau)}\right) \end{aligned} \tag{1}$$

Comme $E[AB] = 0$ et $E[A^2] = E[B^2] = 1$ (variances égales à 1), on en déduit

$$E[X(t)X^*(t-\tau)] = e^{i\lambda\tau} + e^{i\mu\tau}$$

et donc

$$s_X(f) = \delta\left(f - \frac{\lambda}{2\pi}\right) + \delta\left(f - \frac{\mu}{2\pi}\right).$$

Exercice 2 (3 **points**)

On considère un signal aléatoire réel stationnaire $X(t)$ de moyenne nulle et de densité spectrale de puissance $s_X(f)$. On construit le signal aléatoire

$$Y(t) = X(t) + aX(t-d),\ a \in \mathbb{R}, d \in \mathbb{N}.$$

- Montrer que le signal $Y(t)$ est obtenu par filtrage linéaire de $X(t)$ par un filtre dont on déterminera la transmittance $H(f)$ et la réponse impulsionnelle $h(t)$.
  Pour montrer qu'on a une opération de filtrage linéaire, il suffit de déterminer la réponse à $X(t) = \exp(j2\pi ft)$ et de vérifier qu'elle s'écrit $\exp(j2\pi ft)H(f)$, où $H(f)$ est une quantité indépendante de t qui est la transmittance du filtre (voir cours pour justification). Dans l'exemple de cet exercice, la réponse à $X(t) = \exp(j2\pi ft)$ est

  $$Y(t) = \exp(j2\pi ft) + a\exp[j2\pi f(t-d))] = \exp(j2\pi ft)H(f)$$

  avec

  $$H(f) = 1 + ae^{-j2\pi fd}.$$

  Donc $Y(t)$ est obtenu par filtrage de $X(t)$ avec un filtre de transmittance $H(f)$ définie ci-dessus. La réponse impulsionnelle de ce filtre est $h(t) = \text{TF}^{-1}[H(f)]$. On a donc

  $$h(t) = \delta(t) + a\delta(t-d).$$

- Déterminer la densité spectrale de puissance $s_Y(f)$ et la fonction d'autocorrélation $R_Y(\tau)$ du signal $Y(t)$ en fonction de $s_X(f)$ et de $R_X(\tau)$.
  D'après la relation de Wiener-Lee, on a

$$\begin{aligned} s_Y(f) =& s_X(f)|H(f)|^2 \\ =& s_X(f)[1+a\cos(2\pi f d)]^2 + a^2\sin^2(2\pi f d)] \\ =& s_X(f)[1+a^2+2a\cos(2\pi f d)]. \end{aligned}$$

  La fonction d'autocorrélation est la la transformée de Fourier inverse de $s_Y(f)$

$$\begin{aligned} R_Y(\tau) =& (1+a^2)R_X(\tau) + 2aR_X(\tau) * \frac{1}{2}[\delta(\tau-d)+\delta(\tau+d)] \\ =& (1+a^2)R_X(\tau) + a[R_X(\tau-d)+R_X(\tau+d)]. \end{aligned}$$

- Déterminer la puissance du signal $Y(t)$ notée P_Y et montrer que $P_Y \leq P_X(1+a)^2$, où P_X est la puissance du signal $X(t)$.
  La puissance du signal $Y(t)$ est

$$P_Y = R_Y(0) = (1+a^2)R_X(0) + 2aR_X(d)$$

  car la fonction d'autocorrélation d'un signal réel est paire. Comme la fonction d'autocorrélation est maximale en $\tau = 0$, on en déduit

$$P_Y \leq (1+a^2)R_X(0) + 2aR_X(0) = (1+a)^2 P_X.$$

Exercice 3 : Théorème de Bussgang (4 points)

On considère une non-linéarité g appliquée à un processus gaussien réel $X(t)$ stationnaire de moyenne nulle et de fonction d'autocorrélation $R_X(\tau)$

$$Y(t) = g\left[X(t)\right] = X^3(t)$$

et on s'intéresse à l'intercorrélation entre $Y(t)$ et $X(t-\tau)$ notée $R_{YX}(\tau)$. On rappelle que pour un tel processus, la loi du couple $(U,V) = (X(t), X(t-\tau))$ est gaussienne de densité de probabilité

$$f_{\mathbf{\Sigma}}(u,v) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det \mathbf{\Sigma}}} \exp\left[-\frac{1}{2}(u,v)\mathbf{\Sigma}^{-1}(u,v)^T\right]$$

où $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ et où $\mathbf{\Sigma}$ est la matrice de covariance du couple (U,V) définie par

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} \text{var}(U) & \text{cov}(U,V) \\ \text{cov}(U,V) & \text{var}(V) \end{pmatrix}$$

1. Exprimer les éléments de $\mathbf{\Sigma}$ en fonction de $R_X(\tau)$ et $R_X(0)$. En déduire que la fonction d'intercorrélation $R_{YX}(\tau) = E[Y(t)X(t-\tau)]$ ne dépend que de $R_X(\tau)$ et de $R_X(0)$.
   La première partie de cette question est très classique et a été vue en cours :

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} R_X(0) & R_X(\tau) \\ R_X(\tau) & R_X(0) \end{pmatrix}.$$

De plus

$$\begin{aligned}R_{YX}(\tau) =& E[Y(t)X^*(t-\tau)]\\ =& E\left\{g[X(t)]X(t-\tau)\right\}\\ =& \int\int g(u)vf_{\mathbf{\Sigma}}(u,v)dudv.\end{aligned}$$

La fonction d'intercorrélation $R_{YX}(\tau)$ ne dépend donc que des éléments de $\mathbf{\Sigma}$, c'est-à-dire de $R_X(\tau)$ et de $R_X(0)$.

2. On pose $X_1 = X(t)$, $Y_1 = g[X_1] = g[X(t)]$, $X_2 = X(t-\tau]$ et $Y_2 = X(t-\tau)$. En utilisant le théorème de Price, déterminer $\frac{\partial E[Y_1 Y_2]}{\partial E[X_1 X_2]}$ et en déduire $R_{YX}(\tau)$ en fonction de $\mathbb{R}_X(\tau)$ à une constante additive près notée C.
   D'après le théorème de Price

$$\begin{aligned}\frac{\partial R_{YX}(\tau)}{\partial R_X(\tau)} =& E\left[\frac{\partial Y(t)}{\partial X(t)}\frac{\partial X(t-\tau)}{\partial X(t-\tau)}\right]\\ =& E\left[3X^2(t)\times 1\right]\\ =& 3R_X(0).\end{aligned}$$

   Par intégration, on obtient

$$R_{YX}(\tau) = 3R_X(0)R_X(\tau) + C.$$

3. On rappelle que les moments d'un signal Gaussien de moyenne nulle $X(t)$ vérifient la relation

$$m_{2n} = E\left[X^{2n}(t)\right] = \left[(2n-1)(2n-3)\times ... \times 5\times 3\times 1\right]R_X^n(0).$$

   En déduire la constante additive C.
   On a

$$C = R_{YX}(0) - 3R_X^2(0).$$

   Mais

$$R_{YX}(0) = E[Y(t)X(t)] = E[X^4(t)] = 3R_X^2(0),$$

   donc

$$C = 0.$$

4. Vérifier la valeur obtenue de la constante C en calculant $\lim_{\tau\to\infty} R_{YX}(\tau)$ quand $\lim_{\tau\to\infty} R_X(\tau) = 0$
   Quand $\lim_{\tau\to\infty} R_X(\tau) = 0$, $X(t)$ et $X(t-\tau)$ sont décorrélés asymptotiquement mais comme $[X(t), X(t-\tau)]$ est un vecteur Gaussien, $X(t)$ et $X(t-\tau)$ sont indépendants asymptotiquement. On en déduit que $Y(t) = X^3(t)$ et $X(t-\tau)$ sont asymptotiquement indépendants et donc asymptotiquement décorrélés. Comme $E[X^3(t)] = E[X(t-\tau)] = 0$, on en déduit

$$C = \lim_{\tau\to\infty} R_{YX}(\tau) - 3\lim_{\tau\to\infty} R_X(\tau) = 0 - 0 = 0.$$

Transformée de Fourier

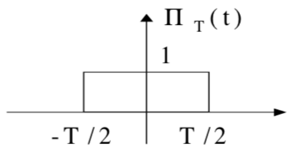
$$X(f) = \int_{\mathbb{R}} x(t) e^{-i2\pi f t} dt \qquad x(t) = \int_{\mathbb{R}} X(f) e^{i2\pi f t} df$$

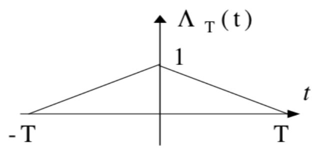
	T.F.	
$x(t)$ réelle paire	$\rightleftharpoons$	$X(f)$ réelle paire
$x(t)$ réelle impaire	$\rightleftharpoons$	$X(f)$ imaginaire pure impaire
$x(t)$ réel	$\rightleftharpoons$	$\begin{cases} \text{Re}\{X(f)\} \text{ paire} \\ \text{Im}\{X(f)\} \text{ impaire} \\ \lvert X(f)\rvert \text{ pair} \\ \arg\{X(f)\} \text{ impaire} \end{cases}$
$ax(t) + by(t)$	$\rightleftharpoons$	$aX(f) + bY(f)$
$x(t - t_0)$	$\rightleftharpoons$	$X(f) e^{-i2\pi f t_0}$
$x(t) e^{+i2\pi f_0 t}$	$\rightleftharpoons$	$X(f - f_0)$
$x^*(t)$	$\rightleftharpoons$	$X^*(-f)$
$x(t) \,.\, y(t)$	$\rightleftharpoons$	$X(f) * Y(f)$
$x(t) * y(t)$	$\rightleftharpoons$	$X(f) \,.\, Y(f)$
$x(at)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{\lvert a\rvert} X\left(\frac{f}{a}\right)$
$\frac{dx^{(n)}(t)}{dt^n}$	$\rightleftharpoons$	$(i2\pi f)^n X(f)$
$(-i2\pi t)^n x(t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{dX^{(n)}(f)}{df^n}$

Formule de Parseval
$\int_{\mathbb{R}} x(t) y^*(t) dt = \int_{\mathbb{R}} X(f) Y^*(f) df$
$\int_{\mathbb{R}} \lvert x(t)\rvert^2 dt = \int_{\mathbb{R}} \lvert X(f)\rvert^2 df$

Série de Fourier
$x(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{+i2\pi n f_0 t} \rightleftharpoons X(f) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \delta(f - n f_0)$
avec $c_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-i2\pi n f_0 t} dt$

	T.F.	
1	$\rightleftharpoons$	$\delta(f)$
$\delta(t)$	$\rightleftharpoons$	1
$e^{+i2\pi f_0 t}$	$\rightleftharpoons$	$\delta(f - f_0)$
$\delta(t - t_0)$	$\rightleftharpoons$	$e^{-i2\pi f t_0}$
$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(t - kT)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{T} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$
$\cos(2\pi f_0 t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{2}[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$
$\sin(2\pi f_0 t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{2i}[\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)]$
$e^{-a\lvert t\rvert}$	$\rightleftharpoons$	$\frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 f^2}$
$\frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 t^2}$	$\rightleftharpoons$	$e^{-a\lvert f\rvert}$
$e^{-at} \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{a + 2i\pi f}$
$\frac{t^n}{n!} e^{-at} \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{(a + 2i\pi f)^{n+1}}$
$e^{-\pi t^2}$	$\rightleftharpoons$	$e^{-\pi f^2}$
$e^{-a^2 t^2}$	$\rightleftharpoons$	$\frac{\sqrt{\pi}}{a} \exp(-\frac{\pi^2 f^2}{a^2})$
$\Pi_T(t)$	$\rightleftharpoons$	$T \frac{\sin(\pi T f)}{\pi T f} = T \sin c(\pi T f)$
$\Lambda_T(t)$	$\rightleftharpoons$	$T \sin c^2(\pi T f)$
$B \sin c(\pi B t)$	$\rightleftharpoons$	$\Pi_B(f)$
$B \sin c^2(\pi B t)$	$\rightleftharpoons$	$\Lambda_B(f)$





!!!!!! Attention !!!!!

$\Pi_T(t)$ est de support égal à T.

$\Lambda_T(t)$ est de support égal à $2T$

et on a $\Pi_T(t) * \Pi_T(t) = T\, \Lambda_T(t)$

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t \neq 0 \\ +\infty \text{ si } t = 0 \end{cases} \quad \text{et} \int_{\mathbb{R}} \delta(t)\, dt = 1$$

$$\delta(t - t_0) f(t) = \delta(t - t_0) f(t_0)$$

$$\delta(t - t_0) * f(t) = f(t - t_0)$$