CORRECTION EXAMEN TRAITEMENT DU SIGNAL - 2EN

Jeudi 8 décembre 2016

Partiel sans document (Une feuille A4 recto-verso autorisée)

Exercice 1: Signal sinusoidal fenêtré (2 points)

On considère un signal $x(t)$ défini par

$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t)\Lambda_T(t)$$

avec $T > 0$ et $f_0 > 0$ (deux constantes) et

$$\Lambda_T(t) = \begin{cases} 1 - \frac{t}{T} \text{ si } 0 < t < T \\ 1 + \frac{t}{T} \text{ si } -T < t < 0 \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

1. Indiquer sans faire de calcul (mais en le justifiant) la classe du signal $x(t)$ (est-il aléatoire, déterministe à énergie finie, déterministe à puissance finie périodique, déterministe à puissance finie non-périodique ?). En déduire la densité spectrale $s_x(f)$ de ce signal. En supposant que la fréquence f_0 est suffisamment grande pour faire l'approximation $\text{sinc}\left[\pi T(f - f_0)\right] \text{sinc}\left[\pi T(f + f_0)\right] \simeq 0$, en déduire une expression approchée de l'énergie du signal $x(t)$. On rappelle la relation suivante

$$\int_0^\infty \frac{\sin^4(u)}{u^4} du = \frac{\pi}{3}.$$

Réponse : $x(t)$ est un signal à énergie finie car il est défini sur un intervalle de temps de durée finie. La densité spectrale d'énergie d'un signal à énergie finie est $s_x(f) = |X(f)|^2$, où $X(f)$ est la transformée de Fourier du signal $x(t)$. On a

$$X(f) = T\text{sinc}^2(\pi f T) * \frac{1}{2}\left[\delta(f - f_0) + \delta(f - f_0)\right] = \frac{T}{2}\left[\text{sinc}^2(\pi(f - f_0)T) + \text{sinc}^2(\pi(f - f_0)T)\right]$$

et donc

$$s_x(f) = |X(f)|^2 = \frac{T^2}{4}\left[\text{sinc}^2(\pi(f - f_0)T) + \text{sinc}^2(\pi(f - f_0)T)\right]^2.$$

En utilisant l'approximation, on obtient

$$s_x(f) \simeq \frac{T^2}{4}\left[\text{sinc}^4(\pi(f - f_0)T) + \text{sinc}^4(\pi(f - f_0)T)\right].$$

L'énergie du signal $x(t)$ s'écrit alors

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} s_x(f) df \simeq \frac{T^2}{4}\left[\int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}^4(\pi(f - f_0)T) df\right] \times 2.$$

Après avoir effectué le changement de variables $u = \pi T(f - f_0)$, on obtient

$$E \simeq \frac{T^2}{2}\left[\int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}^4(u) \frac{du}{\pi T}\right] = \frac{T}{\pi}\left[\int_0^{\infty} \text{sinc}^4(u) du\right] = \frac{T}{3}.$$

Exercice 2 : Produit scalaire (2 **points)**

Soit $x(t)$ un signal aléatoire stationnaire réel de densité spectrale de puissance $s_x(f)$. Déterminer $E[x'(t)x(t-\tau)]$, où $x'(t)$ est la dérivée du signal $x(t)$, sous la forme d'une intégrale dépendant de $s_x(f)$. En déduire $E[x'(t)x(t-\tau)]$ lorsque $s_x(f) = \frac{1}{f},\ f \in \mathbb{R}$.

Réponse : Cet exercice a été traité en cours. On a

$$E[x'(t)x(t-\tau)] = \left\langle x'(t), x(t-\tau) \right\rangle .$$

En utilisant l'isométrie fondamentale, on obtient

$$E[x'(t)x(t-\tau)] = \left\langle j2\pi f e^{j2\pi ft}, e^{j2\pi f(t-\tau)} \right\rangle = \int_{\mathbb{R}} (j2\pi f) e^{j2\pi ft} e^{-j2\pi f(t-\tau)} s_x(f) df$$

c'est-à-dire

$$E[x'(t)x(t-\tau)] = \int_{\mathbb{R}} (j2\pi f) e^{j2\pi f\tau} s_x(f) df.$$

On peut aussi exprimer cette expression en fonction de $R_x(\tau)$ comme suit

$$E[x'(t)x(t-\tau)] = \text{TF}^{-1}\left[(j2\pi f)s_x(f)\right] = R_x'(\tau).$$

Exercice 3 : Dérivée d'un signal aléatoire (2 **points)**

On considère un signal aléatoire stationnaire $x(t)$ de fonction d'autocorrélation $R_x(\tau)$ et de densité spectrale de puissance $s_x(f)$ et on considère le signal $y(t)$ défini par

$$y(t) = x'(t)$$

où $x'(t)$ est la dérivée du signal $x(t)$. Le signal $y(t)$ est-il obtenu par filtrage linéaire de $x(t)$? Si oui, préciser la transmittance de ce filtre. On suppose que $x(t)$ est un signal de densité spectrale de puissance $s_x(f) = \frac{1}{f^2},\ f \in \mathbb{R}$. Déterminer la fonction d'autocorrélation du signal $y(t)$. Comment appelle-t-on un signal qui possède cette fonction d'autocorrélation ?

Réponse : Pour déterminer si $y(t) = x'(t)$ est la sortie d'un filtre linéaire d'entrée $x(t)$, on peut utiliser l'isométrie fondamentale. En remplaçant $x(t)$ par $e^{j2\pi ft}$ dans l'expression de $y(t)$, on obtient

$$y(t) \leftrightarrow (j2\pi f)e^{j2\pi ft}.$$

On en déduit que $y(t)$ est la sortie d'un filtre linéaire de transmittance $H(f) = j2\pi f$. D'après la relation de Wiener-Lee

$$s_y(f) = s_x(f)|H(f)|^2 = 4\pi^2.$$

En conséquence

$$R_x(\tau) = 4\pi^2\delta(\tau).$$

Le signal $y(t)$ est un bruit blanc.

Exercice 4 : Signal cubique (2 points)

On considère un signal aléatoire réel $x(t)$ gaussien de moyenne nulle. On suppose que ce signal est stationnaire de fonction d'autocorrélation $R_x(\tau)$ et de densité spectrale de puissance $s_x(f)$. On forme le signal $y(t) = x^3(t)$. On rappelle que la fonction d'autocorrélation de la sortie du quadrateur (déterminée en cours) est

$$R_{x^2}(\tau) = 2R_x^2(\tau) + R_x^2(0).$$

1. Déterminer une expression de la fonction d'autocorrélation du signal $y(t)$ notée $R_y(\tau)$ en fonction de $R_x(\tau)$ et d'une constante additive C.

2. On rappelle que pour une variable aléatoire Z de loi gaussienne de moyenne nulle et de variance σ^2, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$E\left[Z^{2n}\right] = \left[(2n-1)(2n-3) \times ... \times 5 \times 3 \times 1\right] \sigma^{2n}.$$

   En déduire la valeur de la constante C.

Réponse :

1. Nous avons vu en cours qu'un signal défini par une transformation non linéaire sans mémoire d'un signal aléatoire stationnaire reste stationnaire, plus précisément que $R_y(\tau)$ dépend uniquement de $R_x(\tau)$ et de $R_x(0)$. L'application du théorème de Price conduit à

$$\frac{\partial R_y(\tau)}{\partial R_x(\tau)} = E\left[\frac{\partial y(t)}{\partial x(t)} \frac{\partial y(t-\tau)}{\partial x(t-\tau)}\right] = E\left[3x^2(t) \times 3x^2(t-\tau)\right] = 9R_{x^2}(\tau).$$

   En utilisant l'indication, on obtient

$$\frac{\partial R_y(\tau)}{\partial R_x(\tau)} = 18R_x^2(\tau) + 9R_x^2(0).$$

   En intégrant cette équation, on peut déterminer la fonction d'autocorrélation de $y(t)$

$$R_y(\tau) = 6R_x^3(\tau) + 9R_x^2(0)R_x(\tau) + C.$$

2. Pour trouver C, on fait $\tau = 0$, d'où

$$C = R_y(0) - 6R_x^3(0) - 9R_x^3(0) = E[y^6(0)] - 15R_x^3(0).$$

   En utilisant l'indication, on obtient

$$C = 15R_x^3(0) - 15R_x^3(0) = 0.$$

Exercice 5 : Processus de Poisson homogène (2 points)

On considère un processus de Poisson homogène de paramètre λ et on rappelle que pour un tel processus la variable aléatoire $N(t,\tau)$, qui est le nombre d'instants dans l'intervalle $[t, t+\tau[$, suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda|\tau|$, c'est-dire que

$$P[N(t,\tau) = k] = \frac{(\lambda|\tau|)^k}{k!} \exp(-\lambda|\tau|), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Déterminer les probabilités suivantes

1. P_1: probabilité pour que le nombre d'instants $N(t,\tau)$ soit pair
   Réponse : ce calcul a été effectué en cours

   $$P_1 = \sum_{k=0}^{\infty} P[N(t,\tau) = 2k] = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{(\lambda|\tau|)^{2k}}{(2k)!} e^{-\lambda|\tau|} \right] = e^{-\lambda|\tau|} \mathrm{ch}(\lambda|\tau|) = \frac{1}{2}(1 + e^{-\lambda|\tau|})$$

2. P_2: probabilité pour que le nombre d'instants dans l'intervalle $[a, b[$ (avec $a < b$) soit inférieur ou égal à 1.
   Réponse : on a

   $$P_2 = P[N(a,b) = 0] + P[N(a,b) = 1] = e^{-\lambda(b-a)} + \lambda(b-a)e^{-\lambda(b-a)} = e^{-\lambda(b-a)}[1 + \lambda(b-a)].$$