CORRECTION EXAMEN TRAITEMENT DU SIGNAL - 1TR

Mercredi 7 Janvier 2014 (8h-9h45)

Partiel sans document (Une feuille A4 recto-verso autorisée)

Exercice 1: Échantillonnage d'un signal périodique

On considère un signal déterministe périodique

$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t)$$

où A est une amplitude réelle positive et $f_0 = 5$kHz. On échantillonne ce signal à la fréquence $f_e = 1/T_e$ pour obtenir

$$x_e(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e)\delta(t - kT_e)$$

1. Déterminer les transformées de Fourier des signaux $x(t)$ et $x_e(t)$ notées $X(f)$ et $X_e(f)$ et montrer que $X_e(f)$ s'obtient par périodisation de $X(f)$.
   Réponse : la TF de $x(t)$ est bien connue (voir tables)

   $$X(f) = \frac{A}{2}\left[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)\right].$$

   Celle de $X_e(f)$ a été déterminée en cours

   $$X_e(f) = \text{TF}\left[x(t)\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t - kT_e)\right] = X(f) * \left[f_e \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(f - kf_e)\right] = f_e \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(f - kf_e)$$

   qui s'obtient bien par périodisation de $X(f)$.

2. Représenter graphiquement $X_e(f)$ lorsque $f_e = 100$kHz et lorsque $f_e = 8$kHz.
   Réponse : Il suffit de représenter des raies aux fréquences $f_0 \pm kf_e$ et $-f_0 \pm kf_e$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

3. On filtre le signal $x_e(t)$) l'aide d'un filtre passe bas idéal de fréquence de coupure $f_c = f_e/2$ pour obtenir le signal $x_r(t) = x_e(t) * h(t)$ avec

   $$H(f) = \text{TF}[h(t)] = \frac{1}{f_e}\Pi_{f_e}(f) = \begin{cases} \frac{1}{f_e} \text{ si } -\frac{f_e}{2} \leq f \leq \frac{f_e}{2} \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

   En s'aidant des résultats de la question précédente, déterminer l'expression du signal $x_r(t)$ dans les deux cas $f_e = 100$kHz et $f_e = 8$kHz.
   Réponse : Dans le premier cas ($f_e = 100$kHz), on respecte la condition de Shannon. Le signal restitué est donc

   $$x_r(t) = \cos(2\pi f_0 t)$$

   qui est le signal d'origine. Dans le second cas ($f_e = 8$kHz), on ne respecte plus la condition de Shannon. En faisant un dessin, on observe qu'on obtient après filtrage deux raies aux fréquences $f_r = 3$kHz et $-f_r = -3$kHz, c'est-à-dire

   $$x_r(t) = \cos(2\pi f_r t).$$

4. Qu'appelle-t-on formule d'interpolation de Shannon ?
   Réponse : c'est la formule qui permet de restituer un signal $x(t)$ à partir de ses valeurs échantillonnées $x(kT_e)$ par interpolation (voir cours)

$$x_r(t) = f_e \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e)\text{sinc}\left[\pi f_e(t - kT_e)\right]$$

   avec $\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$.

Exercice 2: Détection d'un signal aléatoire

L'objectif de cet exercice est de détecter la présence d'un signal aléatoire $x(t)$ à partir de deux signaux $x_1(t)$ et $x_2(t)$ définis comme suit

$$x_1(t) = [x(t) + b_1(t)] * h_1(t) \quad \text{et} \quad x_2(t) = [x(t) + b_2(t)] * h_2(t)$$

où $b_1(t), b_2(t)$ et $x(t)$ sont trois signaux aléatoires stationnaires indépendants deux à deux représentant respectivement le bruit associé au signal x_1, le bruit associé au signal x_2 et le signal d'intérêt, et où $h_1(t)$ et $h_2(t)$ sont les réponses impulsionnelles de deux filtres linéaires (invariants dans le temps). On suppose également que les bruits $b_1(t)$ et $b_2(t)$ sont stationnaires de moyennes nulles, c'est-à-dire $E[b_1(t)] = E[b_2(t)] = 0$. Pour détecter la présence du signal $x(t)$, on propose de multiplier les deux signaux $x_1(t)$ et $x_2(t)$ pour former le signal $z(t) = x_1(t)x_2(t)$ et ensuite de filtrer $z(t)$ à l'aide d'un filtre moyenneur pour obtenir le signal $m(t)$ défini comme suit

$$m(t) = \frac{1}{T}\int_{t-T}^{t} z(u)du.$$

1. On commence par étudier l'opération de filtrage par moyennage qui transforme $z(t)$ en $m(t)$ et on suppose que $z(t)$ est un signal aléatoire stationnaire.

   - Justifier que l'opération reliant $z(t)$ et $m(t)$ est une opération de filtrage linéaire.
     Réponse : il y a différentes manières de répondre à cette question. La plus simple est probablement de déterminer la réponse harmonique (ou de manière équivalente d'utiliser l'isométrie fondamentale) qui consiste à faire $z(t) = \exp(j2\pi\nu t)$ et à vérifier que $m(t)$ s'écrit alors $m(t) = H(\nu)\exp(j2\pi\nu t)$. Si c'est le cas, $m(t)$ est obtenu par filtrage de $z(t)$ avec un filtre de transmittance $H(f)$. Si ce n'est pas le cas, $m(t)$ et $z(t)$ ne sont pas liés par une relation de filtrage. Dans le cas présent, quand on remplace $z(t)$ par $\exp(j2\pi\nu t)$, on obtient

$$\begin{aligned} m(t) &= \frac{1}{T}\int_{t-T}^{t} \exp(j2\pi\nu u)du \\ &= \frac{1}{j2\pi\nu T}\left[\exp(j2\pi\nu t) - \exp(j2\pi\nu(t-T))\right] \\ &= \exp(j2\pi\nu t)H(\nu) \end{aligned}$$

     avec

$$\begin{aligned} H(\nu) &= \frac{1}{j2\pi\nu T}\left[1 - \exp(-j2\pi\nu T)\right] \\ &= \frac{\exp(-j\pi\nu T)}{j2\pi\nu T}\left[2j\sin(\pi\nu T)\right] \\ &= \exp(-j\pi\nu T)\text{sinc}(\pi\nu T). \end{aligned}$$

     Donc, $m(t)$ est obtenu par filtrage de $z(t)$ avec un filtre de transmittance $H(f)$.

- Déterminer la réponse impulsionnelle $h(t)$ et la transmittance $H(f)$ de ce filtre.
Réponse : l'expression de $H(f)$ a été déterminée à la question précédente. Celle de $h(t)$ s'obtient par transformée de Fourier inverse

$$h(t) = \delta\left(t - \frac{T}{2}\right) * \left[\frac{1}{T}\Pi_T(t)\right] = \frac{1}{T}\Pi_T\left(t - \frac{T}{2}\right).$$

- Déterminer la moyenne de $m(t)$ en fonction de $m_z = E[z(t)]$.
Réponse : la moyenne de $m(t)$ s'écrit

$$E\left[m(t)\right] = \frac{1}{T}\int_{t-T}^{t} E\left[z(u)\right] du = m_z.$$

- Déterminer la puissance du signal $m(t)$ sous la forme d'une intégrale d'une fonction dépendant de $s_z(f)$ et de T.
Réponse : la puissance de $z(t)$ s'écrit

$$P_z = E\left[z^2(t)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} s_m(f)df.$$

En utilisant la relation de Wiener-Lee, on obtient

$$P_z = \int_{-\infty}^{+\infty} s_z(f)|H(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} s_z(f)\text{sinc}^2(\pi f T)df.$$

Pour étudier la moyenne et la puissance de $m(t)$, on a donc besoin de déterminer $E[z(t)]$ et $s_z(f)$, ce qui est l'objet de la prochaine question.

2. Pour commencer, on suppose que $x(t) = 0$ (absence de signal d'intérêt).

- Déterminer la moyenne du signal $z(t)$.
Réponse : Quand $x(t) = 0$, on a

$$z(t) = x_1(t)x_2(t) = \left[b_1(t) * h_1(t)\right]\left[b_2(t) * h_2(t)\right].$$

En utilisant l'indépendance entre $b_1(t)$ et $b_2(t)$, on obtient

$$E\left[z(t)\right] = E\left[b_1(t) * h_1(t)\right] E\left[b_2(t) * h_2(t)\right] = 0$$

car les bruits $b_1(t)$ et $b_2(t)$ sont de moyennes nulles.

- Déterminer la fonction d'autocorrélation du signal $z(t)$ en fonction de celles de $x_1(t) = b_1(t) * h_1(t)$ et $x_2(t) = b_2(t) * h_2(t)$.
Réponse : La fonction d'autocorrélation du signal $z(t) = x_1(t)x_2(t)$ s'écrit

$$\begin{aligned} R_z(\tau) &= E[z(t)z(t-\tau)] \\ &= E[x_1(t)x_2(t)x_1(t-\tau)x_2(t-\tau)] \\ &= R_{x_1}(\tau)R_{x_2}(\tau) \end{aligned}$$

la dernière égalité ayant été obtenue en utilisant l'indépendance entre les bruits $b_1(t)$ et $b_2(t)$.

- En supposant que les bruits $b_1(t)$ et $b_2(t)$ sont des bruits blancs de densités spectrales de puissance $s_{b_1}(f) = N_1$ et $s_{b_2}(f) = N_2$, en déduire la densité spectrale de puissance $s_z(f)$ (sous forme intégrale) en fonction de N_1, N_2, $H_1(f)$ et $H_2(f)$. Que devient cette expression de $s_z(f)$ lorsque

$$H_1(f) = H_2(f) = \begin{cases} 1 \text{ si } -\frac{F}{2} \leq f \leq \frac{F}{2} \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

avec $F > 0$.
Réponse : D'après l'expression de la fonction d'autocorrélation du signal $(z(t)$, on obtient

$$\begin{aligned} s_z(f) &= s_{x_1}(f) * s_{x_2}(f) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} s_{x_1}(u) s_{x_2}(f-u) du \end{aligned}$$

avec $s_{x_1}(f) = N_1 |H_1(f)|^2$ et $s_{x_2}(f) = N_2 |H_2(f)|^2$. On en déduit

$$s_z(f) = N_1 N_2 \int_{-\infty}^{+\infty} |H_1(u)|^2 |H_1(f-u)|^2 du.$$

3. Dans un second temps, on suppose que le signal d'intérêt est présent, c'est-à-dire que $x(t) \neq 0$.

- On suppose d'abord que $b_1(t) = b_2(t) = 0$ (absence de bruit). En utilisant un résultat du cours (à préciser), expliquer pourquoi la fonction d'intercorrélation des signaux $x_1(t)$ et $x_2(t)$ (définis au début de cet exercice) s'écrit

$$R_{x_1 x_2}(\tau) = E[x_1(t) x_2^*(t-\tau)] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi f\tau} H_1(f) H_2^*(f) s_x(f) df.$$

  Réponse : Il s'agit de l'application directe de la formule des interférences.
- Expliquer pourquoi ce résultat reste valable en présence de bruit, c'est-à-dire pour $b_1(t) \neq 0$ et $b_2(t) \neq 0$.
  Réponse : en présence de bruit, on a $x_1(t) = x(t) * h_1(t) + b_1(t) * h_1(t)$ et $x_2(t) = x(t) * h_2(t) + b_2(t) * h_2(t)$. La fonction d'autocorrélation du produit $z(t) = x_1(t) x_2(t)$ va donc comporter quatre termes. En utilisant l'indépendance entre les bruits $b_1(t)$ et $b_2(t)$ et le fait que ces bruits sont de moyennes nulles, on observe que trois de ces termes sont nuls et donc on retrouve l'expression précédente.
- En déduire la moyenne de $z(t)$ sous la forme d'une intégrale dépendant de $H_1(f)$, $H_2(f)$ et $s_x(f)$. On suppose que $x(t)$ est un signal de puissance P_x de densité spectrale de puissance à bande limitée $[-F/2, F/2]$ et que les filtres $H_1(f)$ et $H_2(f)$ sont définis comme à la question précédente. Montrer alors que $E[z(t)] = P_x$.
  Réponse : La moyenne du signal $z(t)$ s'écrit

$$\begin{aligned} E[z(t)] &= E[x_1(t) x_2(t)] \\ &= R_{x_1 x_2}(0) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} H_1(f) H_2^*(f) s_x(f) df \\ &= \int_{-F/2}^{F/2} s_x(f) df = P_x \end{aligned}$$

- Déterminer la moyenne de $m(t)$ en présence (hypothèse H_1) et en l'absence (hypothèse H_0) du signal $x(t)$ et expliquer comment détecter la présence ou l'absence du signal $x(t)$ à l'aide de la sortie du filtre moyenneur $m(t)$.
  Réponse : D'après les résultats précédents, on a

$$E[m(t)] = \begin{cases} 0 \text{ si le signal x(t) est absent} \\ P_x \text{ si le signal x(t) est présent} \end{cases}$$

  Pour détecter la présence du signal $x(t)$, il suffit d'estimer la moyenne de $m(t)$, par exemple à l'aide d'une moyenne arithmétique, et de comparer cette moyenne à un seuil judicieusement choisi (par exemple fixé à l'aide d'une probabilité de fausse alarme de référence.

Barème

Exercice 1 (6 points)

1. 1 pt
2. 2 pts
3. 2 pts
4. 1pt

Exercice 2 (14 points)

1.
   - filtrage : 1pt
   - $H(f)$: 1pt
   - $h(t)$: 1pt
   - $E[m(t)]$: 1pt
   - $E[m^2(t)]$: 1pt
2.
   - $E[z(t)]$: 1pt
   - $R_z(\tau)$: 1pt
   - $s_z(f)$: 1pt
   - Cas particulier : 1pt
3.
   - Formule des interférences : 1pt
   - Validité en présence de bruit : 1pt
   - $E[z(t)]$: 1pt
   - $E[z(t)]$ dans le cas particulier : 1pt
   - Détection de la présence du signal $x(t)$: 1pt