CORRECTION EXAMEN TRAITEMENT DU SIGNAL - 1TR

Vendredi 9 décembre 2016

Partiel sans document (Une feuille A4 recto-verso autorisée)

Exercice 1: Durée équivalente d'un signal (6 points)

On considère un signal déterministe défini par $x(t) = A\Lambda_T(t)$ où $\Lambda_T(\tau)$ est la fonction triangle définie par

$$\Lambda_T(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{T} \text{ si } |t| < T \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

On suppose dans un premier temps que A est une amplitude réelle positive.

1. Après avoir déterminé la classe du signal $x(t)$ (aucun calcul n'est nécessaire ici), déterminer la densité spectrale du signal $x(t)$ que l'on notera $s_x(f)$. On suppose que l'on sait calculer le produit de convolution $\Lambda_T(\tau) * \Lambda_T(\tau)$ que l'on notera $c(\tau)$. Donner l'expression de la fonction d'autocorrélation de $x(t)$ à l'aide de la fonction c.
Réponse : $x(t)$ est un signal à énergie finie car il est défini sur un intervalle de temps de durée finie. La densité spectrale d'énergie d'un signal à énergie finie est $s_x(f) = |X(f)|^2$, où $X(f)$ est la transformée de Fourier du signal $x(t)$. En s'aidant des tables, on obtient
$$s_x(f) = A^2T^2\text{sinc}^4(\pi fT)$$
et donc
$$R_x(\tau) = A^2\text{TF}^{-1}\left[T\text{sinc}^2(\pi fT)\right] * \text{TF}^{-1}\left[T\text{sinc}^2(\pi fT)\right] = A^2c(\tau).$$

2. Que représente la quantité $R_x(0)$? Déterminer $R_x(0)$ en fonction de A et T.
Réponse : $R_x(0)$ est l'énergie du signal $x(t)$ qui peut se calculer très facilement comme suit
$$R_x(0) = \int_{\mathbb{R}} |x^2(t)|dt = 2\left[\int_0^T A^2\left(1 - \frac{t}{T}\right)^2 dt\right] = \frac{2A^2T}{3}.$$

3. On définit la durée équivalente du signal $x(t)$ comme la durée ΔT d'un signal constant dont l'amplitude est égale à l'amplitude maximale du signal $x(t)$ (notée A_{max}) et de même énergie que $x(t)$. En d'autres termes, ΔT est défini par
$$\int_{\mathbb{R}} |x^2(t)|dt = \left(|A_{\text{max}}|^2\right)\Delta T.$$
Déterminer ΔT pour le signal $x(t) = A\Lambda_T(t)$.
Réponse : En utilisant le résultat de la question précédente, on obtient
$$\frac{2A^2T}{3} = \left(|A_{\text{max}}|^2\right)\Delta T = A^2\Delta T$$
d'où
$$\Delta T = \frac{2T}{3}.$$

4.

On suppose dans un second temps que A est une variable aléatoire uniforme sur l'intervalle $[0, A_{\max}]$.

1. Déterminer $E\left[x^2(t)\right]$. Le signal $x(t)$ est-il stationnaire ?
Réponse : Comme A est une variable aléatoire, le signal $x(t)$ est aléatoire. On a

$$E\left[x^2(t)\right] = E\left[A^2\Lambda_T^2(t)\right] = \Lambda_T^2(t)E\left[A^2\right] = \frac{A_{\max}^2}{3}\Lambda_T^2(t).$$

Comme $E\left[x^2(t)\right]$ dépend de t, le signal $x(t)$ n'est pas stationnaire.

2. On propose de définir la durée équivalente d'un signal aléatoire $x(t)$ comme la durée ΔT telle que

$$\int_{\mathbb{R}} E\left[|x^2(t)|\right] dt = \left(|A_{\text{max}}|^2\right) \Delta T.$$

Déterminer ΔT pour le signal $x(t) = A\Lambda_T(t)$.
Réponse : d'après la question précédente, on a

$$\int_{\mathbb{R}} E\left[|x^2(t)|\right] dt = \frac{A_{\max}^2}{3}\int_{\mathbb{R}} \Lambda_T^2(t)dt = \frac{A_{\max}^2}{3} \times \frac{2T}{3} = \frac{2TA_{\max}^2}{9}$$

d'où

$$\Delta T = \frac{2T}{9}.$$

Exercice 2 : Filtrage linéaire (5 **points)**

On considère un signal aléatoire $x(t)$ stationnaire de moyenne m, de fonction d'autocorrélation $R_x(\tau)$ et de densité spectrale de puissance $s_x(f)$. Etant donnés deux réels a et b tels que $b > a > 0$, on forme le signal

$$y(t) = \int_{t+a}^{t+b} x(u)du - \int_{t-a}^{t-b} x(u)du$$

1. Montrer que le signal $y(t)$ est obtenu par filtrage linéaire de $x(t)$. Déterminer la transmittance et la réponse impulsionnelle de ce filtre.
Réponse : Si on fait $x(t) = e^{j2\pi ft}$, alors on obtient

$$y(t) = \int_{t+a}^{t+b} e^{j2\pi fu}du - \int_{t-a}^{t-b} e^{j2\pi fu}du = \frac{e^{j2\pi ft}}{j2\pi f}\left[e^{j2\pi fb} - e^{j2\pi fa} - e^{-j2\pi fb} + e^{-j2\pi fa}\right]$$

On voit donc que $y(t)$ s'écrit sous la forme $y(t) = e^{j2\pi ft}H(f)$, ce qui signifie que $y(t)$ est le résultat d'un filtrage linéaire de $x(t)$ par un filtre de fonction de transfert

$$\boxed{H(f) = \frac{\sin(2\pi fb) - \sin(2\pi fa)}{\pi f}}$$

Pour déterminer la réponse impulsionnelle du filtre, le plus simple est de prendre $x(t) = \delta(t)$ et on obtient

$$h(t) = \int_{t+a}^{t+b} \delta(u)du - \int_{t-a}^{t-b} \delta(u)du = \int_{t+a}^{t+b} \delta(u)du + \int_{t-b}^{t-a} \delta(u)du$$

d'où

$$\boxed{h(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } t \in [-b, -a] \\ 1 \text{ si } t \in [a, b] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}}$$

2. Déterminer la moyenne et la densité spectrale de puissance de $y(t)$ en fonction de celles de $x(t)$.
   Réponse : Puisque $y(t)$ est obtenu par filtrage linéaire de $x(t)$ et que $x(t)$ est un processus aléatoire stationnaire, $y(t)$ est un processus stationnaire (voir cours). Sa moyenne est définie par

$$E[y(t)] = \int_{t+a}^{t+b} E[x(u)]\, du - \int_{t-a}^{t-b} E[x(u)]\, du = m(b-a) - m(a-b) = 2m(b-a).$$

   La densité spectrale de puissance de $y(t)$ s'obtient à l'aide des relations de Wiener Lee

$$s_y(f) = s_x(f)\,|H(f)|^2 = s_x(f) \frac{[\sin(2\pi f b) - \sin(2\pi f a)]^2}{\pi^2 f^2}.$$

Exercice 3 : Echantillonnage à porte analogique (5 points)

On considère un signal déterministe $x(t)$ de transformée de Fourier à bande limitée $[-F_{\max}, F_{\max}]$.
1) Rappeler l'expression du signal $x_e(t)$ obtenu par échantillonnage idéal de $x(t)$ à la fréquence F_e. Déterminer la transformée de Fourier de $x_e(t)$ notée $X_e(f)$. Représenter cette transformée de Fourier $X_e(f)$ lorsque $F_e > 2F_{\max}$ et

$$x(t) = F_{\max} \left[\frac{\sin(\pi F_{\max} t)}{\pi F_{\max} t}\right]^2.$$

Réponse : Le signal $x_e(t)$ obtenu par échantillonnage idéal de $x(t)$ à la fréquence F_e est défini par

$$x_e(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_e)\delta(t - kT_e) = x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_e).$$

La transformée de Fourier de $x_e(t)$ s'écrit alors

$$X_e(f) = X(f) * F_e \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - kF_e) = F_e \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(f - kF_e).$$

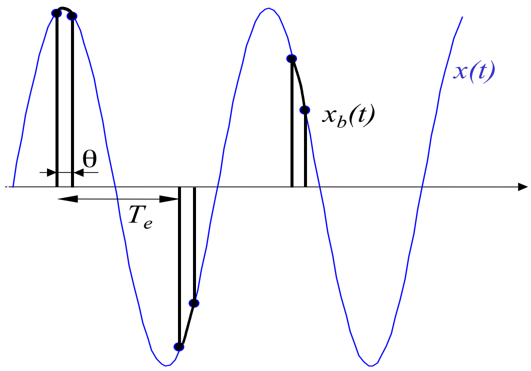
Lorsque $x(t) = F_{\max} \left[\frac{\sin(\pi F_{\max} t)}{\pi F_{\max} t}\right]^2$, on a

$$X(f) = \Lambda_{F_{\max}}(f),$$

d'où

$$X_e(f) = F_e \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Lambda_{F_{\max}}(f - kF_e).$$

2) On considère désormais l'opération de blocage par produit représentée ci-dessous (le signal d'origine est en bleu et le signal bloqué par produit est en noir)



Exprimer le signal $x_b(t)$ comme le produit de $x(t)$ avec une somme de fonctions portes que l'on précisera. Exprimer cette somme de fonctions portes comme le produit de convolution entre un peigne de Diracs et une fonction que l'on précisera. En déduire une expression de la transformée de Fourier de $x_b(t)$ notée $X_b(f)$. Expliquer comment retrouver la condition de Shannon à partir de $X_b(f)$. On suppose que la condition $F_e > 2F_{\max}$ est vérifiée. Qu'obtient-on lorsqu'on filtre le signal $x_b(t)$ par un filtre passe bas idéal de transmittance $H(f) = \Pi_{F_e}(f)$?

Réponse : Le signal bloqué s'écrit

$$x_b(t) = x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Pi_\theta \left(t - kT_e - \frac{\theta}{2}\right) = x(t) \left[\Pi_\theta \left(t - \frac{\theta}{2}\right) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_e)\right]$$

La transformée de Fourier de $x_b(t)$ s'écrit alors

$$X_b(f) = X(f) * \left[e^{-j\pi\theta f} \theta \sin c\,(\pi\theta f)\, F_e \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - kF_e)\right]$$

c'est-à-dire

$$X_b(f) = F_e\theta X(f) * \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-j\pi\theta kF_e} \sin c\,(\pi\theta kF_e)\, \delta(f - kF_e)\right]$$

et finalement on obtient

$$X_b(f) = F_e\theta \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-j\pi\theta kF_e} \sin c\,(\pi\theta kF_e)\, X(f - kF_e).$$

Lorsqu'on filtre le signal $x_b(t)$ par un filtre passe bas idéal de transmittance $H(f) = \Pi_{F_e}(f)$, on obtient le spectre d'ordre 0 correspondant à $k = 0$, c'est-à-dire

$$F_e\theta X(f).$$

On retrouve bien le spectre du signal d'intérêt.

Exercice 4 : signal cubique (4 points)

On considère un signal aléatoire réel $x(t)$ gaussien de moyenne nulle. On suppose que ce signal est stationnaire de fonction d'autocorrélation $R_x(\tau)$ et de densité spectrale de puissance $s_x(f)$. On forme le signal $y(t) = x^3(t)$.

1. Justifier que le signal $y(t)$ est un signal stationnaire. De quoi dépend sa fonction d'autocorrélation $R_y(\tau)$?
   Réponse : Nous avons vu en cours qu'un signal défini par une transformation non linéaire sans mémoire d'un signal aléatoire stationnaire reste stationnaire. $R_y(\tau)$ dépend uniquement de $R_x(\tau)$ et de $R_x(0)$.

2. On rappelle que la fonction d'autocorrélation de la sortie du quadrateur (déterminée en cours) est

$$R_{x^2}(\tau) = 2R_x^2(\tau) + R_x^2(0).$$

   Déterminer une expression de la fonction d'autocorrélation du signal $y(t)$ notée $R_y(\tau)$ en fonction de $R_x(\tau)$ et d'une constante additive C.
   Réponse : L'application du théorème de Price conduit à

$$\frac{\partial R_y(\tau)}{\partial R_x(\tau)} = E\left[\frac{\partial y(t)}{\partial x(t)}\frac{\partial y(t-\tau)}{\partial x(t-\tau)}\right] = E\left[3x^2(t) \times 3x^2(t-\tau)\right] = 9R_{x^2}(\tau).$$

   En utilisant l'indication, on obtient

$$\frac{\partial R_y(\tau)}{\partial R_x(\tau)} = 18R_x^2(\tau) + 9R_x^2(0).$$

   En intégrant cette équation, on peut déterminer la fonction d'autocorrélation de $y(t)$

$$R_y(\tau) = 6R_x^3(\tau) + 9R_x^2(0)R_x(\tau) + C.$$

3. On rappelle que pour un signal Gaussien de moyenne nulle, on a

$$E\left[x^{2n}(t)\right] = \left[(2n-1)\,(2n-3) \times ... \times 5 \times 3 \times 1\right]\sigma^{2n}.$$

   En déduire la valeur de la constante C.
   Réponse : Pour trouver C, on fait $\tau = 0$, d'où

$$C = R_y(0) - 6R_x^3(0) - 9R_x^3(0) = E[y^6(0)] - 15R_x^3(0).$$

   En utilisant l'indication, on obtient

$$C = 15R_x^3(0) - 15R_x^3(0) = 0.$$