Correction Examen Signaux Aléatoires - 2EN
Jeudi 7 Décembre 2017

Exercice 1 (2,5 points)

$E = \int_{\mathbb{R}} x^2(t)\,dt = 2T < +\infty$ donc $x(t)$ est un signal à énergie finie (0,5)

$x(t) = \Pi_T(t - \frac{T}{2}) - \Pi_T(t + \frac{T}{2})$

Donc $X(f) = \underbrace{T \,\text{sinc}(\pi T f)}_{\text{Table}} \left[\underbrace{e^{-j\pi f T} - e^{j\pi f T}}_{-2j \sin(\pi T f)} \right]$

$= \boxed{-2jT \,\text{sinc}(\pi f T) \sin(\pi f T)}$ (0,5)

Rq
Des expressions équivalentes sont $X(f) = \frac{1 - \cos(2\pi f T)}{j\pi f}$ ou

$X(f) = \frac{2 \sin^2(\pi f T)}{j\pi f}$

La densité spectrale de puissance de $x(t)$ est

$s_x(f) = |X(f)|^2 = \boxed{4T^2 \,\text{sinc}^2(\pi f T) \sin^2(\pi f T)}$ (0,5)

On sait que $\sin^2(\pi f T) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(4\pi f T)$ dont la transformée de Fourier inverse est

$TF^{-1}[\sin^2(\pi f T)] = \frac{1}{2}\delta(\tau) - \frac{1}{4}\delta(\tau - T) - \frac{1}{4}\delta(\tau + T)$

On en déduit

$R_x(\tau) = 4T \underbrace{TF^{-1}[T \,\text{sinc}^2(\pi f T)]}_{\Lambda_T(\tau)} * \underbrace{TF^{-1}[\sin^2(\pi f T)]}_{\frac{1}{2}\delta(\tau) - \frac{1}{4}\delta(\tau - T) - \frac{1}{4}\delta(\tau + T)}$

$= \boxed{2T \left[\Lambda_T(\tau) - \frac{1}{2}\Lambda_T(\tau - T) - \frac{1}{2}\Lambda_T(\tau + T) \right]}$ (1)

Exercice 2 (3 points)

La première question a été faite en cours

$E[(x(t) - x(t-\tau))^2] = E[x^2(t) - 2x(t)x(t-\tau) + x^2(t-\tau)]$

$= \boxed{2[R_x(0) - R_x(\tau)]}$ (0,5)

$R_x(\tau)$ ~~...~~ mesure le lien entre $x(t)$ et $x(t-\tau)$ (0,5)

De la même façon, on obtient

$$g(a) = E\left[x^2(t) + a^2 x^2(t-\tau) - 2a\, x(t)x(t-\tau)\right]$$

$$= \boxed{(1+a^2)\,R_x(0) - 2a\,R_x(\tau)}$$ 0,5

qui est minimum pour $g'(a) = 0 \iff 2a\,R_x(0) - 2\,R_x(\tau) = 0$

$$\iff \boxed{\hat{a}(\tau) = \frac{R_x(\tau)}{R_x(0)}}$$ 0,5

On en déduit

$$g[\hat{a}(\tau)] = \left[1 + \frac{R_x^2(\tau)}{R_x^2(0)}\right] R_x(0) - 2\,\frac{R_x^2(\tau)}{R_x(0)}$$

$$= \boxed{R_x(0)\left[1 - \frac{R_x^2(\tau)}{R_x^2(0)}\right]}$$ 0,5

$R_x(0) \geq 0$ car c'est la puissance du signal $x(t)$

$R_x(\tau) \leq R_x(0)$ donc $\dfrac{R_x^2(\tau)}{R_x^2(0)} \leq 1 \Rightarrow g[\hat{a}(\tau)] \geq 0$ 0,5

$\hat{a}(\tau)\,x(t-\tau)$ est le meilleur prédicteur linéaire de $x(t)$ à partir de $x(t-\tau)$ 0,5

Exercice 3 (3 points)

Le plus simple est d'utiliser l'isométrie fondamentale. Si on remplace $x(u)$ par $e^{j2\pi f u}$ on obtient

$$\int_{t-2}^{t} e^{j2\pi f u}\,du = \frac{e^{j2\pi f t} - e^{j2\pi f(t-2)}}{j2\pi f}$$

$$= e^{j2\pi f t}\,\underbrace{\frac{1 - e^{-j4\pi f}}{j2\pi f}}_{\text{ind de } t}$$

Comme $\dfrac{1 - e^{-j4\pi f}}{j2\pi f}$ est indépendant de t, $y(t)$ est obtenu par filtrage linéaire de $x(t)$ avec un filtre de transmittance

$$\boxed{H(f) = \frac{1 - e^{-j4\pi f}}{j2\pi f}}$$ 1

Remarque : Des expressions équivalents de $H(f)$ sont

$$H(f) = \frac{e^{-j2\pi f}\sin(2\pi f)}{\pi f} = 2e^{-j2\pi f}\,\mathrm{sinc}(2\pi f)$$

On peut factoriser $H(f)$ comme suit

$$H(f) = e^{-j2\pi f}\,\frac{e^{j2\pi f} - e^{-j2\pi f}}{2j\pi f}$$

$$\boxed{H(f) = 2e^{-j2\pi f}\,\mathrm{sinc}(2\pi f)}$$

On en déduit $h(\tau) = 2\,\delta(\tau - 1) * \frac{1}{2}\Pi_2(\tau)$ 1

soit $\boxed{h(\tau) = \Pi_2(\tau - 1)}$

D'après la relation de Wiener-Lee, la densité spectrale de $Y(t)$ s'écrit

$$S_Y(f) = S_X(f)\,|H(f)|^2$$

Mais $S_X(f) = TF[\Lambda_1(\tau)] = \mathrm{sinc}^2(\pi f)$, d'où

$$S_Y(f) = \mathrm{sinc}^2(\pi f) \times 4\,\mathrm{sinc}^2(2\pi f)$$

$$= 4\,\frac{\sin^2(\pi f)}{\pi^2 f^2} \times \frac{\sin^2(2\pi f)}{4\pi^2 f^2}$$

En utilisant la relation $\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$, on obtient

$$\boxed{S_Y(f) = \frac{[1 - \cos(2\pi f)][1 - \cos(4\pi f)]}{4\pi^4 f^4}}$$ 1

Exercice (2 points)

Cet exercice avait été fait partiellement (1ère question) en cours.

On sait que le nombre d'appels reçus entre l'instant t et l'instant $t+\tau$ noté $N(t,\tau)$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda|\tau|$

Soit $N(t,\tau) \sim P(\lambda|\tau|)$

- On demande

$$P_1 = P\left[N(7^h, \tfrac{1}{2}h) = 2 \mid N(7^h, 1h) = 2 \right]$$

En utilisant la définition des probas conditionnelles, on obtient

$$P_1 = \frac{P\left[N(7^h, \tfrac{1}{2}h) = 2 \text{ et } N(7^h, 1h) = 2 \right]}{P\left[N(7^h, 1^h) = 2 \right]}$$

On sait que $N(t,\tau)$ et $N(t',\tau')$ sont des variables <u>indépendantes</u> si les intervalles $[t, t+\tau[$ et $[t', t'+\tau'[$ sont <u>disjoints</u>.
On peut réécrire le numérateur de P_1 différemment de manière à obtenir

$$P_1 = \frac{P\left[N(7^h, \tfrac{1}{2}h) = 2 \text{ et } N(7^h30, \tfrac{1}{2}h) = 0 \right]}{P(N(7^h, 1^h) = 2)}$$

d'où

$$P_1 = \frac{\frac{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2}{2} \cancel{e^{-\lambda/2}} \times \cancel{\frac{(\lambda/2)^0 e^{-\lambda/2}}{0!}}}{\frac{\left(\frac{\lambda}{1}\right)^2}{2} \cancel{e^{-\lambda}}}$$

soit $\boxed{P_1 = \frac{1}{4}}$

$$P_2 = P\left[N(7^h, \tfrac{1}{2}h) \geq 1 \mid N(7^h, 1^h) = 2 \right]$$

$$= 1 - P\left[N(7^h, \tfrac{1}{2}h) < 1 \mid N(7^h, 1^h) = 2 \right]$$

$$= 1 - P\left[N(7^h, \tfrac{1}{2}h) = 0 \mid N(7^h, 1^h) = 2 \right]$$

$$= 1 - \frac{\underbrace{\frac{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^0 e^{-\lambda/2}}{0!}}_{P[N(7^h, \frac{1}{2}h) = 0]} \times \underbrace{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 \frac{e^{-\lambda/2}}{2!}}_{P[N(7^h30, \frac{1}{2}h) = 2]}}{\underbrace{\frac{\lambda^2}{2} e^{-\lambda}}_{P(N(7^h, 1^h) = 2)}}$$

D'où $P_2 = 1 - \frac{1}{4} = \boxed{\frac{3}{4}}$