

Ex. 2 • On a $x(t) = e^{j2\pi f t} e^{j\phi}$ donc la moyenne de $x(t)$ est

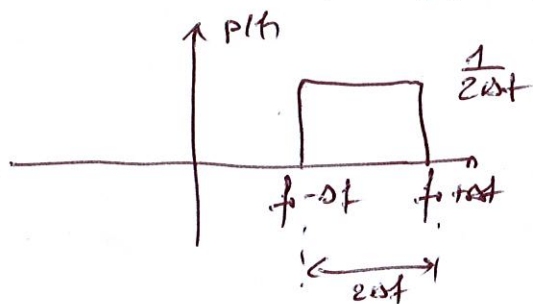
(1)

$$E[x(t)] = e^{j\phi} E[e^{j2\pi f t}]$$

$$= e^{j\phi} \int e^{j2\pi f t} p(f) df$$

où $p(f)$ est la densité de probabilité de la fréquence f , soit

$$p(f) = \frac{1}{2\Delta f} \mathbb{1}_{[f_0 - \Delta f, f_0 + \Delta f]}(f) = \frac{1}{2\Delta f} \Pi_{2\Delta f}(f - f_0)$$



ou $\mathbb{1}_A(f)$ est la fonction indicatrice sur l'ensemble A

On observe que $\int e^{j2\pi f t} p(f) df$ est la transformée de Fourier inverse de $p(f)$ donc

$$E[x(t)] = e^{j\phi} \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{1}{2\Delta f} \Pi_{2\Delta f}(f - f_0) \right]$$

$$= e^{j\phi} \frac{1}{2\Delta f} (2\Delta f) \text{sinc}(2\pi\Delta f t) e^{j2\pi f_0 t}$$

(1,5 pt)

$$= \boxed{e^{j(2\pi f_0 t + \phi)} \text{sinc}(2\pi\Delta f t)}$$

puisque le signal $x(t)$ n'est pas stationnaire car $E[x(t)]$ dépend de t

• Fonction d'autocorrélation

$$E[x(t)x^*(t-\tau)] = E[e^{j\phi} e^{j2\pi f t} e^{-j\phi} e^{-j2\pi f(t-\tau)}]$$

$$= E[e^{j2\pi f \tau}]$$

(0,5)

Ce calcul a été fait à la question précédente. On a

(0,5)

$$R_x(\tau) = \boxed{e^{j2\pi f_0 \tau} \text{sinc}(2\pi\Delta f \tau)}$$

La densité spectrale de puissance est

(1)

$$S_x(f) = \delta(f - f_0) * \frac{1}{2\Delta f} \Pi_{2\Delta f}(f) = \boxed{\frac{1}{2\Delta f} \Pi_{2\Delta f}(f - f_0)}$$

La puissance du signal $x(t)$ est

(2)

0,5 pt

$$P = R_x(0) = \boxed{1}$$

Ex2 Rapport signal sur bruit à l'entrée du filtre

La puissance du signal aléatoire $a(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \phi)$ est $P_a = R_a(0) = \text{avec} \int S_a(f) df$ où $R_a(\tau)$ et $S_a(f)$ sont la fonction d'autocorrélation et la densité spectrale de puissance de $a(t)$.

On a vu en cours $R_a(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f_0 \tau)$, $S_a(f) = \frac{A^2}{4} [\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)]$

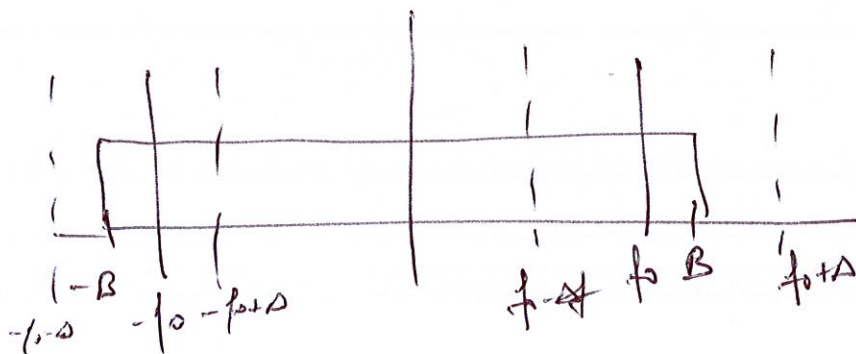
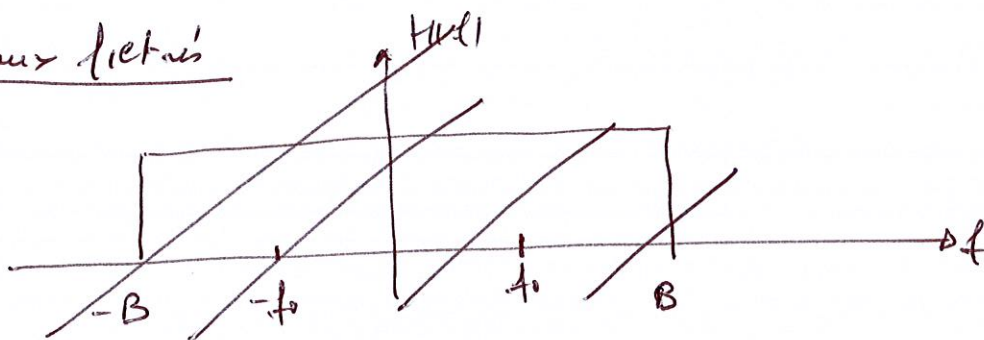
et $P_a = \frac{A^2}{2}$ (0,5)

La puissance du bruit est

$$P_b = \int S_b(f) df = \int_{-f_0-\Delta f}^{f_0+\Delta f} \frac{1}{\Delta f} df + \int_{f_0-\Delta f}^{f_0+\Delta f} \frac{1}{\Delta f} df = \boxed{4}$$

alors $\gamma_e = \frac{P_a}{P_b} = \frac{A^2}{8}$ (0,5)

Puissance des signaux filtrés



③ P_{za} $\Delta z_a(t) = \Delta a(t) |H(f)|^2 = \Delta a(t) = \frac{A^2}{4} (\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0))$

Donc $P_{za} = P_a$.

④,5 Comme la fréquence f_0 est dans la bande du filtre, la puissance du signal fictif est égale à la puissance de $a(t)$ (signal non fictif)

P_{zb} $\Delta z_b(t) = \Delta b(t) |H(f)|^2$

donc $P_{zb} = \int \Delta z_b(t) dt = \int_{-B}^B \Delta b(t) dt = \int_{-B}^{-f_0+\Delta} \frac{1}{\Delta} dt + \int_{f_0-\Delta}^B \frac{1}{\Delta} dt$

↑
voir dessin

donc $P_{zb} = \frac{1}{\Delta} \times (B - f_0 + \Delta) \times 2 = \frac{2(B - f_0 + \Delta)}{\Delta}$

④,5

Rapport signal sur bruit en sortie du filtre

On a $B < f_0 + \Delta$ donc $B - f_0 < \Delta$

donc $P_{zb} < \frac{2 \cdot (2\Delta)}{\Delta} = 4$

① donc $\gamma_s = \frac{P_{za}}{P_{zb}} = \frac{A^2/2}{P_{zb}} > \frac{A^2}{8} = \gamma_a$

On a donc amélioré le rapport sur bruit

Ex3 1) Cette question a été vue en cours

$\text{Var } U = E[X^2(t)] = R_x(0)$

$\text{Var } V = E[X^2(t-\tau)] = R_x(0)$

$\text{Cov}(U, V) = E[UV] = E[X(t)X(t-\tau)] = R_x(\tau)$

④,5 donc $\Sigma = \begin{pmatrix} R_x(0) & R_x(\tau) \\ R_x(\tau) & R_x(0) \end{pmatrix}$

On en déduit $R_y(\tau) = E[Y(t)Y(t-\tau)] = E[G(X(t))G(X(t-\tau))]$

$$\text{donc } R_Y(\tau) = \iint G(u) G(v) p(u, v) du dv \quad (4)$$

où $p(u, v)$ est la densité de probabilité de $(U, V) = (X(t), X(t-\tau))$

On en déduit

$$\textcircled{1} \quad R_Y(\tau) = \iint G(u) G(v) \frac{1}{2\pi \sqrt{R_X^2(0) - R_X^2(\tau)}} \exp\left[-\frac{1}{2}(u \ v) \bar{\Sigma}^{-1} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right] du dv$$

qui ne dépend que de $R_X(0)$ et $R_X(\tau)$

2) D'après le théorème de Parseval

$$\frac{\partial R_Y(\tau)}{\partial R_X(\tau)} = E\left[\frac{\partial Y(t)}{\partial X(t)} \frac{\partial Y(t-\tau)}{\partial X(t-\tau)} \right]$$

$$= E\left[\frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2(t)}{2}} \cdot e^{-\frac{x^2(t-\tau)}{2}} \right]$$

$$\textcircled{1} \quad = \frac{1}{2\pi} E\left[\exp\left\{-\frac{1}{2}(x^2(t) + x^2(t-\tau))\right\} \right]$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{(1+R_X^2(0)) - R_X^2(\tau)}}$$

D'après le rappel

$$\boxed{R_Y(\tau) = \frac{1}{2\pi} \text{Arcsin}\left(\frac{R_X(\tau)}{1+R_X(0)}\right) + C}$$

0,5