EXAMEN TRAITEMENT DU SIGNAL - SIGNAUX ALÉATOIRES - 2 EEEA

Mardi 5 Novembre 2019

Partiel sans document (Une feuille A4 recto-verso autorisée)

Exercice 1 (4 points)

On considère un signal aléatoire $x(t)$ défini par

$$x(t) = A \exp[j2\pi Bt]$$

où $j^2 = -1$, A est une variable aléatoire uniforme sur $\{-1, +1\}$, c'est-à-dire $P[A = 1] = P[A = -1] = \frac{1}{2}$ et B est une variable aléatoire indépendante de A et de loi uniforme sur l'intervalle $]0, 1[$. On rappelle qu'une variable aléatoire uniforme sur l'intervalle $]0, 1[$ possède la densité

$$p(b) = \begin{cases} 1 \text{ si } b \in]0, 1[\\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Montrer que $x(t)$ est un signal stationnaire et déterminer la densité spectrale de puissance et la puissance du signal $x(t)$.

Exercice 2 : Annulation d'échos (4 points)

Un système "réverbérant" d'entrée $x(t)$ et de sortie $y(t)$ est défini par

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k x(t - kT).$$

On supposera dans cet exercice que $x(t)$ est un signal aléatoire stationnaire et que $h_0 = 1$, $h_1 = -a$ (avec $a \in]0, 1[$) et $h_k = 0, \forall k \geq 2$.

1. Montrer que $y(t)$ peut être obtenu par filtrage linéaire de $x(t)$ à l'aide d'un filtre dont on déterminera la réponse impulsionnelle $h(t)$ et la transmittance $H(f)$.

2. On peut considérer que $y(t)$ est une superposition d'échos du signal $x(t)$. Afin d'annuler ces échos, on peut filtrer le signal $y(t)$ par un filtre inverse de transmittance $G(f) = \frac{1}{H(f)}$. Déterminer la réponse impulsionnelle de ce filtre inverse notée $g(t)$ et montrer qu'elle s'écrit

$$g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k \delta(t - kT)$$

avec des coefficients g_k à déterminer.

3. On approche le filtre inverse précédent par un filtre à réponse impulsionnelle finie

$$g_K(t) = \sum_{k=0}^{K-1} g_k \delta(t - kT)$$

et on note $z(t) = y(t) * g_K(t)$ la sortie de l'annulateur d'échos. Déterminer la densité spectrale de puissance de $z(t)$ en fonction de celle de $x(t)$ notée $s_x(f)$ et des paramètres a, K et T.

Exercice 3 : Puissance quatrième d'un signal aléatoire (2 points)

On considère un signal aléatoire réel $x(t)$ gaussien de moyenne nulle. On suppose que ce signal est stationnaire de fonction d'autocorrélation $R_x(\tau)$ et de densité spectrale de puissance $s_x(f)$. On forme le signal $y(t) = x^4(t)$. On rappelle que la fonction d'autocorrélation de la sortie du signal cubique $z(t) = x^3(t)$ (déterminée en TD) est

$$R_z(\tau) = R_{x^3}(\tau) = 6R_x^3(\tau) + 9R_x(\tau)R_x^2(0).$$

1. Déterminer une expression de la fonction d'autocorrélation du signal $y(t)$ notée $R_y(\tau)$ en fonction de $R_x(\tau)$ et d'une constante additive C.

2. On rappelle que pour une variable aléatoire Z de loi gaussienne de moyenne nulle et de variance σ^2, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$E\left[Z^{2n}\right] = \left[(2n-1)\,(2n-3) \times \ldots \times 5 \times 3 \times 1\right]\sigma^{2n}.$$

En déduire la valeur de la constante C.

Transformée de Fourier

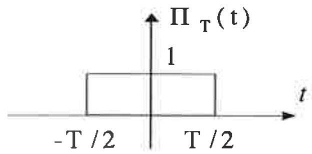
$$X(f) = \int_{\mathbb{R}} x(t) e^{-i2\pi ft} dt \qquad x(t) = \int_{\mathbb{R}} X(f) e^{i2\pi ft} df$$

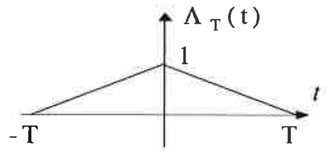
	T.F.	
$x(t)$ réelle paire	$\rightleftharpoons$	$X(f)$ réelle paire
$x(t)$ réelle impaire	$\rightleftharpoons$	$X(f)$ imaginaire pure impaire
$x(t)$ réel	$\rightleftharpoons$	$\left\{\begin{array}{c} \mathrm{Re}\{X(f)\} \text{ paire} \\ \mathrm{Im}\{X(f)\} \text{ impaire} \\ \lvert X(f)\rvert \text{ pair} \\ \arg\{X(f)\} \text{ impaire} \end{array}\right.$
$ax(t) + by(t)$	$\rightleftharpoons$	$aX(f) + bY(f)$
$x(t - t_0)$	$\rightleftharpoons$	$X(f)e^{-i2\pi f t_0}$
$x(t)e^{+i2\pi f_0 t}$	$\rightleftharpoons$	$X(f - f_0)$
$x^*(t)$	$\rightleftharpoons$	$X^*(-f)$
$x(t)\ .\ y(t)$	$\rightleftharpoons$	$X(f) * Y(f)$
$x(t) * y(t)$	$\rightleftharpoons$	$X(f)\ .\ Y(f)$
$x(at)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{\lvert a\rvert} X\left(\frac{f}{a}\right)$
$\frac{dx^{(n)}(t)}{dt^n}$	$\rightleftharpoons$	$(i2\pi f)^n X(f)$
$(-i2\pi t)^n x(t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{dX^{(n)}(f)}{df^n}$

Formule de Parseval
$\int_{\mathbb{R}} x(t)y^*(t)dt = \int_{\mathbb{R}} X(f)Y^*(f)df$
$\int_{\mathbb{R}} \lvert x(t)\rvert^2 dt = \int_{\mathbb{R}} \lvert X(f)\rvert^2 df$

Série de Fourier
$x(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{+i2\pi n f_0 t} \rightleftharpoons X(f) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \delta(f - nf_0)$
avec $c_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-i2\pi n f_0 t} dt$

	T.F.	
1	$\rightleftharpoons$	$\delta(f)$
$\delta(t)$	$\rightleftharpoons$	1
$e^{+i2\pi f_0 t}$	$\rightleftharpoons$	$\delta(f - f_0)$
$\delta(t - t_0)$	$\rightleftharpoons$	$e^{-i2\pi f t_0}$
$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta(t - kT)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{T}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$
$\cos(2\pi f_0 t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{2}[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$
$\sin(2\pi f_0 t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{2i}[\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)]$
$e^{-a\lvert t\rvert}$	$\rightleftharpoons$	$\frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 f^2}$
$e^{-\pi t^2}$	$\rightleftharpoons$	$e^{-\pi f^2}$
$\Pi_T(t)$	$\rightleftharpoons$	$T\frac{\sin(\pi T f)}{\pi T f} = T \sin c(\pi T f)$
$\Lambda_T(t)$	$\rightleftharpoons$	$T \sin c^2(\pi T f)$
$B \sin c(\pi B t)$	$\rightleftharpoons$	$\Pi_B(f)$
$B \sin c^2(\pi B t)$	$\rightleftharpoons$	$\Lambda_B(f)$





!!!!!! Attention !!!!!

$\Pi_T(t)$ est de support égal à T.

$\Lambda_T(t)$ est de support égal à $2T$

et on a $\Pi_T(t) * \Pi_T(t) = T\ \Lambda_T(t)$

$$\delta(t) = \left\{\begin{array}{c} 0 \text{ si } t \neq 0 \\ +\infty \text{ si } t = 0 \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} \delta(t)\, dt = 1$$

$$\delta(t - t_0) f(t) = \delta(t - t_0) f(t_0)$$

$$\delta(t - t_0) * f(t) = f(t - t_0)$$

Correction Examen 5 Novembre 2019

1

Ex1 Comme A et B sont des variables indépendantes, on a

$$E[x(t)] = E[A]\, E[e^{j2\pi Bt}]$$

avec $E[A] = 1\times\frac{1}{2} + (-1)\times\frac{1}{2} = 0$ donc $\boxed{E[x(t)] = 0}$

De même

$$E[x(t)x^*(t-\tau)] = E[A^2]\, E[e^{j2\pi Bt}\, e^{-j2\pi B(t-\tau)}]$$

$A^2 = 1$ donc $E(A^2) = 1$ d'où

$$E[x(t)x^*(t-\tau)] = E[e^{j2\pi B\tau}] = \int_0^1 e^{j2\pi b\tau}\, db$$

$$= \left[\frac{e^{j2\pi b\tau}}{j2\pi\tau}\right]_0^1$$

d'où $\boxed{E[x(t)x^*(t-\tau)] = \dfrac{e^{j2\pi\tau} - 1}{j2\pi\tau}}$

Comme $E[x(t)]$ et $E[x(t)x^*(t-\tau)]$ sont des quantités indépendantes de t, le signal x(t) est stationnaire

En factorisant par $e^{j\pi\tau}$, on obtient

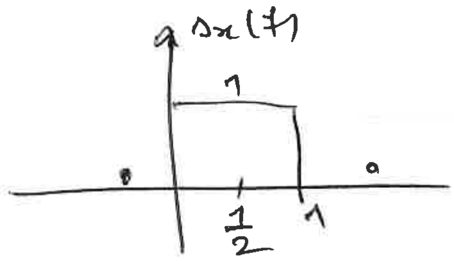
$$R_x(\tau) = e^{j\pi\tau}\, \frac{e^{j\pi\tau} - e^{-j\pi\tau}}{2j\pi\tau} = e^{j\pi\tau}\, \frac{\sin(\pi\tau)}{\pi\tau}$$

soit $\boxed{R_x(\tau) = \mathrm{sinc}(\pi\tau)\, e^{j\pi\tau}}$ (*)

La densité spectrale de x(t) est

$$S_x(f) = \mathrm{TF}[R_x(\tau)] = \Pi_1(f) * \delta(f - \tfrac{1}{2})$$

soit $\boxed{S_x(f) = \Pi_1(f - \tfrac{1}{2})}$



La puissance du signal $x(t)$ est

$$P_x = R_x(0) = \boxed{1} \quad \text{(d'après l'expression (*))}$$

$\boxed{\text{Ex 2}}$

1) Par isométrie, $x(t) \xrightarrow{\ I\ } e^{j2\pi f t}$

$$y(t) \xrightarrow{\ I\ } \sum_{k=0}^{+\infty} h_k \, e^{j2\pi f(t-kT)}$$

$$= e^{j2\pi f t} \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} h_k \, e^{-j2\pi f kT}}_{H(f)}$$

On en déduit donc que $y(t) = \mathcal{J}[x(t)]$ avec un filtre de transmittance

$$H(f) = \sum_{k=0}^{+\infty} h_k \, e^{-j2\pi k f T} = h_0 + h_1 e^{-j2\pi f T}$$

car $h_k = 0 \ \forall k \geq 2$ d'où

$$\boxed{H(f) = 1 + a\, e^{-j2\pi f T}}$$

$$h(t) = TF^{-1}[H(f)] = \boxed{\delta(t) + a\,\delta(t-T) = h(t)}$$

2) $$G(f) = \frac{1}{H(f)} = \frac{1}{1 + a\, e^{-j2\pi f T}}$$

donc $$g(t) = TF^{-1}[G(f)] = TF^{-1}\left[\sum_{k=0}^{+\infty} a^k e^{j2\pi k f T}\right]$$

dvt en série de

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{+\infty} z^k \text{ pour } |z|<1$$

donc $$\boxed{g(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} a^k \,\delta(t-kT)}$$ soit $$\boxed{g_k = a^k \quad k \in \mathbb{N}}$$

3) D'après la relation de Wiener-Lee, on a

$$S_z(f) = S_y(f)\,|G_K(f)|^2 \quad \text{avec} \quad G_K(f) = \mathbb{F}[g_K(t)]$$

Mais $g_K(t) = \sum_{k=0}^{K-1} a^k \,\delta(t-kT)$ donc

$$G_K(f) = \sum_{k=0}^{K-1} a^k e^{-j2\pi f kT} = \boxed{\frac{1-a^K e^{-j2\pi f KT}}{1-a\,e^{-j2\pi f T}}}$$

somme des premiers
termes d'une
suite géométrique

On en déduit $S_z(f) = \dfrac{|1-a^k e^{-j2\pi k fT}|^2}{|1-a\,e^{-j2\pi fT}|^2}\, S_y(f)$

Mais $S_y(f) = S_x(f)\,|H(f)|^2 = S_x(f)\,|1-a\,e^{-j2\pi fT}|^2$

d'où

$$\frac{S_z(f)}{S_x(f)} = \left|1-\left(a\,e^{-j2\pi fT}\right)^k\right|^2$$

$$\frac{S_z(f)}{S_x(f)} = \left|1-a^k\left[\cos(2\pi k fT) - j\sin(2k\pi fT)\right]\right|^2$$

$$= \left[1-a^k\cos(2k\pi fT)\right]^2 + a^{2K}\sin^2(2k\pi fT)$$

$$\boxed{S_z(f) = \left[1 - 2a^K\cos(2k\pi fT) + a^{2K}\right] S_x(f)}$$

on remarquera que lorsque $K \to +\infty$ $\quad a^K \to 0$, $a^{2K} \to 0$ $\quad \Rightarrow \boxed{S_z(f) \underset{K\to\infty}{\longrightarrow} S_x(f)}$

$\boxed{\text{Ex3}}$ D'après le théorème de Price

1)
$$\frac{\partial R_y(\tau)}{\partial R_x(\tau)} = E\left[\underbrace{\frac{\partial y(t)}{\partial x(t)}}_{4x^3(t)} \underbrace{\frac{\partial y(t-\tau)}{\partial x(t-\tau)}}_{4x^3(t-\tau)} \right] = 16\, R_{x^3}(\tau)$$

On en déduit avec le rappel

$$\frac{\partial R_y(\tau)}{\partial R_x(\tau)} = (16\times 6)R_x^3(\tau) + (16\times 9)\, R_x(\tau)\, R_x^2(0)$$

d'où

$$\boxed{R_y(\tau) = 24\, R_x^4(\tau) + 72\, R_x^2(\tau)\, R_x^2(0) + cste}$$

2) Pour trouver la constante, on fait $\tau = 0$ et on obtient

$$cste = R_y(0) - 24\, R_x^4(0) - 72\, R_x^4(0)$$

Mais $R_y(0) = \mathbb{E}[y^2(t)] = E[x^8(t)] = (7\times 5\times 3)\,\sigma^8$

avec $\sigma^2 = R_x(0)$ donc

$$cste = [(7\times 15) - 24 - 72]\, R_x^4(0) = \boxed{9\, R_x^4(0)}$$

On en conclut

$$\boxed{R_y(t) = 24\, R_x^4(\tau) + 72\, R_x^2(\tau)\, R_x^2(0) + 9\, R_x^4(0)}$$