EXAMEN TRAITEMENT DU SIGNAL - SIGNAUX ALÉATOIRES - 2 EEEA

Mardi 15 Décembre 2020

Partiel sans document (Une feuille A4 recto-verso autorisée)

Exercice 1 (4 points)

On considère un signal aléatoire $Z(t)$ défini par

$$Z(t) = A \exp\left[2j\pi Bt\right]$$

où $j^2 = -1$, A est une variable aléatoire uniforme sur $]-1,+1[$, B est une variable aléatoire indépendante de A possédant une loi de Laplace de densité

$$f(b) = \frac{1}{2}\exp(-|b|), b \in \mathbb{R}.$$

On rappelle qu'une variable aléatoire A uniforme sur $]-1,1[$ vérifie $E[A] = 0$ et $E[A^2] = 1/3$.

1. Montrer que $Z(t)$ est un signal aléatoire stationnaire.

   Le signal $Z(t)$ est stationnaire si sa moyenne $E[Z(t)]$ et sa fonction d'autocorrélation $E[Z(t)Z^*(t-\tau)]$ sont des quantités indépendantes du temps. En utilisant le fait que les variables aléatoires A et B sont indépendantes, on obtient

   $$E[Z(t)] = E[A]E\left\{\exp\left[2j\pi Bt\right]\right\} = 0 \text{ (car } E[A] = 0).$$

   De même

   $$\begin{aligned} E[Z(t)Z^*(t-\tau)] =& E[A^2]E\left\{\exp\left[2j\pi Bt\right]\exp\left[-2j\pi B(t-\tau)\right]\right\} \\ =& \frac{1}{3}E\left[\exp\left(2j\pi B\tau\right)\right] \end{aligned} \tag{1}$$

   qui est une quantité indépendante de t. Le signal $Z(t)$ est donc stationnaire au second ordre.

2. Déterminer la fonction d'autocorrélation et la densité spectrale de puissance de $Z(t)$.
   D'après la question précédente

   $$\begin{aligned} E[Z(t)Z^*(t-\tau)] =& \frac{1}{3}E\left[\exp\left(2j\pi B\tau\right)\right] \\ =& \frac{1}{3}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(2j\pi b\tau\right)p(b)db \\ =& \frac{1}{6}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(2j\pi b\tau\right)\exp(-|b|)db. \end{aligned} \tag{2}$$

   On peut calculer cette intégrale de manière directe

   $$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(2j\pi b\tau\right)\exp(-|b|)db =& \int_{-\infty}^{0}\exp\left(2j\pi b\tau\right)\exp(b)db + \int_{0}^{\infty}\exp\left(2j\pi b\tau\right)\exp(-b)db \\ =& \frac{1}{2j\pi\tau+1} + \frac{1}{1-2j\pi\tau} = \frac{2}{4\pi^2\tau^2+1}. \end{aligned} \tag{3}$$

   ce qui permet d'obtenir

   $$R_Z(\tau) = \frac{1}{3(1+4\pi^2\tau^2)}.$$

Mais on peut aussi remarquer que

$$
\begin{aligned}
E[Z(t)Z^*(t-\tau)] =& \frac{1}{6}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(2j\pi b\tau\right)\exp(-|b|)db \\
=& \frac{1}{6}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(2j\pi f\tau\right)\exp(-|f|)df \\
=& \frac{1}{6}\text{TF}^{-1}\left[e^{-|f|}\right] \\
=& \frac{1}{6}\times\frac{2}{1+4\pi^2\tau^2} = \frac{1}{3(1+4\pi^2\tau^2)}.
\end{aligned} \tag{4}
$$

La densité spectrale de puissance du signal $Z(t)$ est

$$
s_Z(f) = \text{TF}[R_Z(\tau)] = \frac{1}{6}e^{-|f|}.
$$

3. On considère un filtre de transmittance $H(f) = e^{-3|f|}$ dont l'entrée est le signal $Z(t)$. Déterminer la fonction d'autocorrélation du signal de sortie $W(t) = Z(t) * h(t)$ avec $h(t) = \text{TF}^{-1}[H(f)]$.
D'après la relation de Wiener-Lee

$$
\begin{aligned}
s_W(f) =& s_Z(f)|H(f)|^2 \\
=& \frac{1}{6}e^{-|f|}\times e^{-6|f|} = \frac{1}{6}e^{-7|f|}.
\end{aligned}
$$

Donc

$$
R_W(\tau) = \text{TF}^{-1}\left[\frac{1}{6}e^{-7|f|}\right] = \frac{1}{6}\times\frac{1}{7}\times\frac{2\times 49}{49+4\pi^2\tau^2} = \frac{7}{3(49+4\pi^2\tau^2)}.
$$

Exercice 2 : Filtrage Adapté (3 points)

On considère le signal $X(t)$ défini par

$$
X(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } t \in [0,1[\\ 2-t \text{ si } t \in [1,2] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}
$$

1. Le signal $X(t)$ est-il à énergie finie, à puissance finie ou aléatoire ? Déterminer la fonction d'autocorrélation de $X(t)$ en $\tau = 0$.
Puisque le signal $X(t)$ est défini sur un intervalle borné $[0,2]$, il est à énergie finie. La fonction d'autocorrélation de $X(t)$ en $\tau = 0$ est son énergie définie par

$$
\begin{aligned}
E =& \int_{\mathbb{R}} X^2(t)dt \\
=& \int_0^1 1dt + \int_1^2 (2-t)^2 dt \\
=& 1+\frac{1}{3} = \frac{4}{3}.
\end{aligned} \tag{5}
$$

2. Représenter graphiquement la réponse impulsionnelle du filtre adapté au signal $X(t)$ lorsque l'instant de décision est $t_0 = 2$.
   D'après le cours, le filtre adapté à $X(t)$ s'obtient par une symmétrie par rapport à l'axe des y et une translation de $t_0 = 2$. Il est donc défini par

$$h(t) = \begin{cases} t \text{ si } t \in [0, 1[\\ 1 \text{ si } t \in [1, 2] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

3. Déterminer le rapport signal sur bruit en sortie du filtre adapté dans le cas d'un bruit blanc additif stationnaire de densité spectrale de puissance $s_n(f) = 1$.
   Dans le cas d'un bruit blanc, le rapport signal sur bruit en sortie du filtre adapté est le rapport entre l'énergie E du signal $X(t)$ et la densité spectrale du bruit $s_n(f) = N_0/2 = 1$, soit

$$\text{SNR} = \frac{2E}{N_0} = \frac{4}{3}.$$

Exercice 3 (3 points)

On considère un signal aléatoire réel $x(t)$ gaussien de moyenne nulle. On suppose que ce signal est stationnaire de fonction d'autocorrélation $R_x(\tau)$ et de densité spectrale de puissance $s_x(f)$. On forme le signal $y(t) = \beta\alpha^{x(t)} = \beta \exp[x(t) \ln(\alpha)]$ avec $\alpha > 0$ et $\beta > 0$.

1. À l'aide du théorème de Price, déterminer une expression de la fonction d'autocorrélation du signal $y(t)$ notée $R_y(\tau)$ en fonction de $R_x(\tau)$ et d'une constante multiplicative notée K.
   D'après le théorème de Price, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_y(\tau)}{\partial R_x(\tau)} =& E\left[\frac{\partial y(t)}{\partial x(t)} \frac{\partial y(t-\tau)}{\partial x(t-\tau)}\right] \\ =& E\left[\ln(\alpha) y(t) \times \ln(\alpha) y(t-\tau)\right] \\ =& [\ln(\alpha)]^2 R_y(\tau). \end{aligned} \tag{6}$$

   On en déduit

$$\frac{\partial R_y(\tau)}{R_y(\tau)} = [\ln(\alpha)]^2 \partial R_x(\tau).$$

   En intégrant cette équation, on obtient

$$\ln |R_y(\tau)| = [\ln(\alpha)]^2 R_x(\tau) + C,$$

   soit

$$R_y(\tau) = K \exp\left\{[\ln(\alpha)]^2 R_x(\tau)\right\}.$$

2. On rappelle que la fonction génératrice des moments d'une variable aléatoire Z de loi gaussienne $N\left(m, \sigma^2\right)$ est :

$$E\left[e^{Zu}\right] = \exp\left(mu + \frac{\sigma^2}{2}u^2\right), \ \forall u \in \mathbb{R}.$$

   En déduire la constante K.
   Pour trouver K, on fait $\tau = 0$ dans l'expression de $R_y(\tau)$ et on obtient

$$R_y(0) = K \exp\left\{[\ln(\alpha)]^2 R_x(0)\right\} \Leftrightarrow K = \frac{R_y(0)}{\exp\left\{[\ln(\alpha)]^2 R_x(0)\right\}}.$$

Mais

$$
\begin{aligned}
R_y(0) =& E[y^2(t)] \\
=& E\left[\beta^2 \exp(2\ln(\alpha)x(t))\right] \\
=& \beta^2 E[e^{ux(t)}]
\end{aligned} \tag{7}
$$

avec $u = 2\ln(\alpha)$. Comme $x(t)$ est une variable aléatoire de moyenne nulle et de variance $E[x^2(t)] = R_x(0)$, on a

$$
R_y(0) = \beta^2 \exp\left\{\frac{1}{2} \times [2\ln(\alpha)]^2 \times R_x(0)\right\} = \beta^2 \exp\left[2\ln^2(\alpha)R_x(0)\right],
$$

d'où

$$
K = \frac{R_y(0)}{\exp\{[\ln(\alpha)]^2 R_x(0)\}} = \beta^2 \exp\left\{[\ln(\alpha)]^2 R_x(0)\right\}.
$$

On en déduit

$$
R_y(0) = \beta^2 \exp\left\{[\ln(\alpha)]^2 [R_x(0) + R_x(\tau)]\right\}.
$$

Remarque : cet exercice est inspiré de l'exercice 4.11 de la page 254 du livre de J. Yang et C. Liu intitulé "Random Signal Analysis" publié chez l'éditeur Gruyter en 2018.

Transformée de Fourier

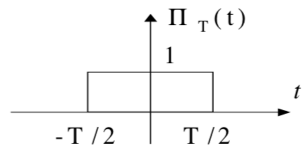
$$X(f) = \int_{\mathbb{R}} x(t)e^{-i2\pi ft}dt \qquad x(t) = \int_{\mathbb{R}} X(f)e^{i2\pi ft}df$$

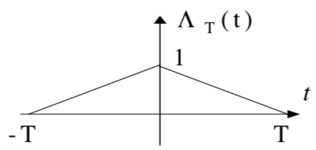
	T.F.	
$x(t)$ réelle paire	$\rightleftharpoons$	$X(f)$ réelle paire
$x(t)$ réelle impaire	$\rightleftharpoons$	$X(f)$ imaginaire pure impaire
$x(t)$ réel	$\rightleftharpoons$	$\begin{cases} \text{Re}\{X(f)\} \text{ paire} \\ \text{Im}\{X(f)\} \text{ impaire} \\ \lvert X(f)\rvert \text{ pair} \\ \arg\{X(f)\} \text{ impaire} \end{cases}$
$ax(t) + by(t)$	$\rightleftharpoons$	$aX(f) + bY(f)$
$x(t - t_0)$	$\rightleftharpoons$	$X(f)e^{-i2\pi ft_0}$
$x(t)e^{+i2\pi f_0 t}$	$\rightleftharpoons$	$X(f - f_0)$
$x^*(t)$	$\rightleftharpoons$	$X^*(-f)$
$x(t) \,.\, y(t)$	$\rightleftharpoons$	$X(f) * Y(f)$
$x(t) * y(t)$	$\rightleftharpoons$	$X(f) \,.\, Y(f)$
$x(at)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{\lvert a\rvert} X\left(\frac{f}{a}\right)$
$\frac{dx^{(n)}(t)}{dt^n}$	$\rightleftharpoons$	$(i2\pi f)^n X(f)$
$(-i2\pi t)^n x(t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{dX^{(n)}(f)}{df^n}$

Formule de Parseval
$\int_{\mathbb{R}} x(t)y^*(t)dt = \int_{\mathbb{R}} X(f)Y^*(f)df$
$\int_{\mathbb{R}} \lvert x(t)\rvert^2 dt = \int_{\mathbb{R}} \lvert X(f)\rvert^2 df$

Série de Fourier
$x(t) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{+i2\pi nf_0 t} \rightleftharpoons X(f) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n \delta(f - nf_0)$
avec $c_n = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)e^{-i2\pi nf_0 t}dt$

	T.F.	
1	$\rightleftharpoons$	$\delta(f)$
$\delta(t)$	$\rightleftharpoons$	1
$e^{+i2\pi f_0 t}$	$\rightleftharpoons$	$\delta(f - f_0)$
$\delta(t - t_0)$	$\rightleftharpoons$	$e^{-i2\pi ft_0}$
$\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \delta(t - kT)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{T}\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$
$\cos(2\pi f_0 t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{2}[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$
$\sin(2\pi f_0 t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{2i}[\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)]$
$e^{-a\lvert t\rvert}$	$\rightleftharpoons$	$\frac{2a}{a^2+4\pi^2 f^2}$
$\frac{2a}{a^2+4\pi^2 t^2}$	$\rightleftharpoons$	$e^{-a\lvert f\rvert}$
$e^{-at}\mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{a+2i\pi f}$
$\frac{t^n}{n!}e^{-at}\mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{(a+2i\pi f)^{n+1}}$
$e^{-\pi t^2}$	$\rightleftharpoons$	$\frac{\sqrt{\pi}}{a}\exp\left(-\frac{\pi^2 f^2}{a^2}\right)$
$e^{-a^2 t^2}$	$\rightleftharpoons$	$e^{-\pi f^2}$
$\Pi_T(t)$	$\rightleftharpoons$	$T\frac{\sin(\pi Tf)}{\pi Tf} = T\sin c(\pi Tf)$
$\Lambda_T(t)$	$\rightleftharpoons$	$T\sin c^2(\pi Tf)$
$B\sin c(\pi Bt)$	$\rightleftharpoons$	$\Pi_B(f)$
$B\sin c^2(\pi Bt)$	$\rightleftharpoons$	$\Lambda_B(f)$





!!!!!! Attention !!!!!

$\Pi_T(t)$ est de support égal à T.

$\Lambda_T(t)$ est de support égal à $2T$

et on a $\Pi_T(t) * \Pi_T(t) = T\,\Lambda_T(t)$

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t \neq 0 \\ +\infty \text{ si } t = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} \delta(t)\,dt = 1$$

$$\delta(t - t_0)\,f(t) = \delta(t - t_0)\,f(t_0)$$

$$\delta(t - t_0) * f(t) = f(t - t_0)$$