EXAMEN TRAITEMENT DU SIGNAL - 1SN

Jeudi 18 Janvier 2018

Partiel sans document (Une feuille A4 recto-verso autorisée)

Exercice 1 (5 points)

Pour $f_0 > 0$, on considère un signal déterministe

$$x(t) = f_0 \left[\frac{\sin(\pi f_0 t)}{\pi f_0 t}\right]^2 = f_0 \text{sinc}^2(\pi f_0 t).$$

1. On échantillonne le signal $x(t)$ avec la fréquence d'échantillonnage $F_e = 1/T_e$. Déterminer la transformée de Fourier du signal échantillonné

$$x_e(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e)\delta(t - kT_e)$$

notée $X_e(f)$. Représenter graphiquement $X_e(f)$ lorsque $F_e = 4f_0$.

2. On construit le signal numérique $y(kT_e)$ de la manière suivante

$$y(kT_e) = \begin{cases} x(kT_e) \text{ si } k \text{ pair} \\ -x(kT_e) \text{ sinon.} \end{cases}$$

c'est-à-dire $y(kT_e) = (-1)^k x(kT_e)$. Montrer que la transformée de Fourier du signal échantillonné $y_e(t)$ est définie par

$$Y_e(f) = X_e\left(f + \frac{F_e}{2}\right).$$

Représenter $Y_e(f)$ pour $F_e = 4f_0$.

3. Comment peut-on restituer le signal $x(t)$ à partir du signal échantillonné $x_e(t) + y_e(t)$ avec $y(kT_e) = (-1)^k x(kT_e)$?

Exercice 2 : Questions de cours (2 points)

- Qu'appelle-t'on formule d'interpolation de Shannon ?
- Qu'est ce qu'un signal stationnaire ?
- Qu'est ce qu'un bruit blanc ?
- Qu'est ce qu'un filtre anti-repliement ? Est-il analogique ou numérique ?

Exercice 3 (3 points)

On considère un signal aléatoire stationnaire $X(t)$ de moyenne nulle et de fonction d'autocorrélation $R_X(\tau) = \Lambda_1(\tau)$ avec

$$\Lambda_1(\tau) = \begin{cases} 1-\tau \text{ si } 0 \leq \tau \leq 1 \\ 1+\tau \text{ si } -1 \leq \tau \leq 0 \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

et on forme le signal aléatoire

$$Y(t) = \int_{t-2}^{t} X(u)du$$

- Montrer que $Y(t)$ est obtenu par filtrage linéaire de $X(t)$ avec un filtre dont on déterminera la fonction de transfert et la réponse impulsionnelle.
- Montrer que la densité spectrale de puissance de $X(t)$ s'écrit

$$s_Y(f) = \frac{[1-\cos(2\pi f)]\,[(1-\cos(4\pi f)]}{4\pi^4 f^4}$$

On rappelle la relation $\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$.

Ex1

1) La première partie de cette question a été traitée en cours

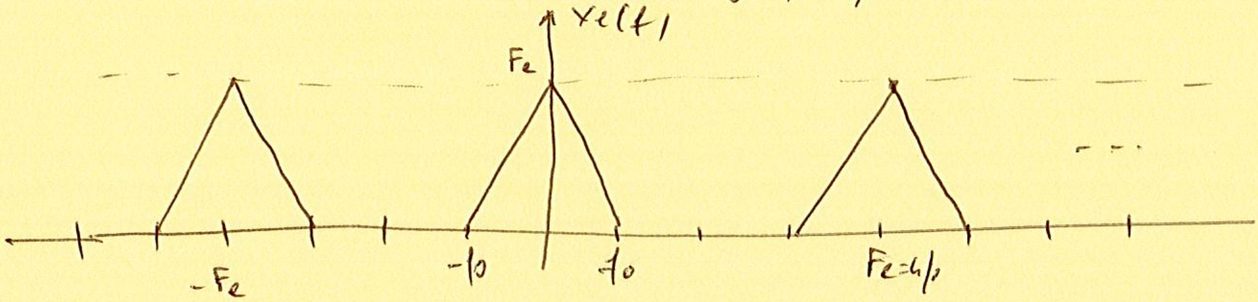
$$x_e(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x(kT_e)\,\delta(t-kT_e) = x(t)\sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta(t-kT_e)$$

Donc $$X_e(f) = X(f) * \left[F_e \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta(f-kF_e)\right] = \boxed{F_e \sum_{k\in\mathbb{Z}} X(f-kF_e)}$$

Pour $x(t) = f_0 \operatorname{sinc}^2(\pi f_0 t)$ on a $X(f) = \Lambda_{f_0}(f)$ d'où

$$\boxed{X_e(f) = F_e \sum_{k\in\mathbb{Z}} \Lambda_{f_0}(f-kF_e)}$$ 1 pt

Pour $F_e = 4f_0$, on a la représentation graphique suivante



1 pt

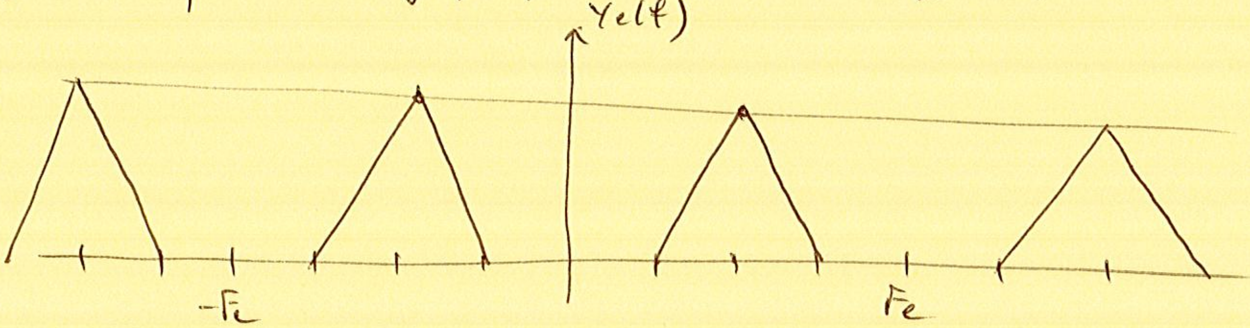
2) $$y_e(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} y(kT_e)\,\delta(t-kT_e) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (-1)^k x(kT_e)\,\delta(t-kT_e)$$

donc $$Y_e(f) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{jk\pi} x(kT_e)\, e^{-j2\pi f kT_e} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x(kT_e)\, e^{-j2\pi kT_e(f+\frac{F_e}{2})}$$

$(-1)^k = e^{jk\pi}$

$$= \boxed{X_e\left(f+\frac{F_e}{2}\right)}$$ 1 pt

D'où la représentation graphique pour $F_e = 4f_0$ ($\frac{F_e}{2} = 2f_0$)



1 pt

On a effectué un décalage de $X_e(f)$ de $-\frac{F_e}{2} = -2f_0$

3) Le spectre du signal échantillonné $x_e(t) + y_e(t)$ est $X_e(f) + Y_e(f)$
Pour restituer $x(t)$ à partir de $x_e(t) + y_e(t)$, il suffit donc de filtrer avec un filtre de transmittance $\Pi_{2f_0}(f)$ (filtre passe bas) 1 pt

Ex2

• Formule d'interpolation de Shannon

$$x_r(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x(kT_e)\ \mathrm{sinc}\left[\pi F_e(t-kT_e)\right]$$ (0,5)

• Signal stationnaire

Un signal aléatoire $x(t)$ est stationnaire si $E[x(t)]$ et $E[x(t)x^*(t-\tau)]$ sont des quantités indépendantes de t. On note alors

$$\boxed{\begin{aligned} m &= E[x(t)] \\ R_x(\tau) &= E[x(t)x^*(t-\tau)] \end{aligned}}$$ (0,5)

• Bruit blanc

Un signal aléatoire stationnaire tel que $s_x(f) = \text{Constante} = K$, i.e., tel que $R_x(\tau) = K\,\delta(\tau)$ est appelé bruit blanc (il possède toutes les fréquences comme la lumière blanche) (0,5)

• Filtre anti-repliement

Un filtre anti-repliement est un filtre analogique qui permet de limiter la bande d'intérêt d'un signal qu'on cherche à échantillonner.
Si la bande d'intérêt est $[0,B]$, on va avant échantillonnage filtrer ce signal avec un filtre analogique de support $[0,B]$ de manière à éviter que certaines "hautes fréquences" liées par exemple au bruit ne se replient dans la bande d'intérêt (0,5)

Ex3

•) Pour $x(u) = e^{j2\pi f u}$, on obtient $y(t) = \int_{t-2}^{t} x(u)\,du = \int_{t-2}^{t} e^{j2\pi f u}\,du$

Soit $y(t) = \left[\dfrac{e^{j2\pi f u}}{j2\pi f}\right]_{t-2}^{t} = \dfrac{e^{j2\pi f t}}{j2\pi f}\left[1 - e^{-j4\pi f}\right]$

Comme $y(t)$ s'écrit $e^{j2\pi f t} H(f)$ avec $H(f) = \dfrac{1-e^{-j4\pi f}}{j2\pi f}$ (qui est indépendant de t), $y(t)$ est obtenu par filtrage linéaire de $x(t)$ avec un filtre de transmittance

$$\boxed{H(f) = \frac{1 - e^{-j4\pi f}}{j2\pi f}}$$ (1pt)

On peut réécrire $H(f)$ sous la forme

$$H(f) = e^{-j2\pi f}\left[\frac{e^{j2\pi f} - e^{-j2\pi f}}{j2\pi f}\right] = e^{-j2\pi f}\,\frac{\cancel{2j}\sin(2\pi f)}{\cancel{2j}\,\pi f}$$

soit $H(f) = e^{-j2\pi f} \times 2\,\mathrm{sinc}(2\pi f)$

donc $h(t) = \delta(t-1) * \Pi_2(t) = \boxed{\Pi_2(t-1)}$ 1pr

- La densité de $y(t)$ s'obtient à l'aide de la relation de Wiener-Lee

$$S_y(f) = S_x(f)\,|H(f)|^2$$

soit

$$S_y(f) = TF[\Lambda_1(t)]\,\frac{\sin^2(2\pi f)}{\pi^2 f^2}$$

$$= \mathrm{sinc}^2(\pi f) \times \frac{\sin^2(2\pi f)}{\pi^2 f^2}$$

$$= \frac{1-\cos(2\pi f)}{2\pi^2 f^2} \times \frac{1-\cos(4\pi f)}{2\pi^2 f^2}$$

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$$

d'où

$$\boxed{S_y(f) = \frac{[1-\cos(2\pi f)][1-\cos(4\pi f)]}{4\pi^4 f^4}}$$

1pr