Correction de l'examen du 15/01/2019

Ex1 : Analyse spectrale

1) On a $x(t) = e^{j2\pi A} e^{j2\pi Bt}$ donc $|x(t)|^2 = 1$ soit $\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = 1$

le signal $x(t)$ est donc à puissance finie

(1pt) De plus $x(t+\frac{1}{B}) = \exp(j2\pi A)\exp(j2\pi Bt + j2\pi) = x(t)$

le signal $x(t)$ est donc périodique de période $T = \frac{1}{B}$

2) La fonction d'autocorrélation de $x(t)$ est définie par

$$R_x(\tau) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\, x^*(t-\tau)\, dt$$

Donc $$R_x(\tau) = B\int_{-\frac{1}{2B}}^{\frac{1}{2B}} \cancel{e^{j2\pi A}}\, \cancel{e^{j2\pi Bt}}\, \cancel{e^{-j2\pi A}}\, e^{-j2\pi B(\cancel{t}-\tau)} dt$$

(1pt) $$= B\, e^{j2\pi B\tau}\int_{-1/2B}^{\frac{1}{2B}} dt = \boxed{e^{j2\pi B\tau}}$$

La densité spectrale de puissance de $x(t)$ est donc

(1pt) $$S_x(f) = TF[R_x(\tau)] = TF[e^{j2\pi B\tau}] = \boxed{\delta(f-B)}$$

Ex2 : Filtrage

1) On peut déterminer la réponse harmonique de la transformation qui à $x(t)$ associe $y(t) = x(t) + a\,x(t-t_0)$. Pour cela, on pose $x(t) = e^{j2\pi ft}$ et on obtient

$$y(t) = e^{j2\pi ft} + a\, e^{j2\pi f(t-t_0)}$$

(1pt) $$= e^{j2\pi ft}\left[1 + a e^{-j2\pi f t_0}\right]$$

Comme $1 + a e^{-j2\pi f t_0}$ est une quantité indépendante de t, $y(t)$ est obtenu par filtrage de $x(t)$ avec un filtre de transmittance $H(f) = 1 + a e^{-j2\pi f t_0}$

2) D'après la relation de Wiener-Lee, on a ~~Sy(f)~~

$$S_y(f) = S_x(f)\,|H(f)|^2$$
$$= \Pi_F(f)\,\underbrace{|1+a e^{-j2\pi f t_0}|^2}$$

$$|1+a\cos(2\pi f t_0) - j a \sin(2\pi f t_0)|^2$$

1pt

$$[1+a\cos(2\pi f t_0)]^2 + a^2\sin^2(2\pi f t_0)$$

$$1+a^2+2a\cos(2\pi f t_0)$$

donc $$\boxed{S_y(f) = \begin{cases} 1+a^2+2a\cos(2\pi f t_0) & \text{si } -F/2 < f < F/2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

3) la puissance de y(t) peut s'obtenir par intégration de $S_y(f)$

$$P_y = \int_{-F/2}^{F/2} S_y(f)\,df = (1+a^2)F + \cancel{2}a\left[\frac{\sin(2\pi f t_0)}{\cancel{2}\pi t_0}\right]_{-F/2}^{F/2}$$

$$= (1+a^2)F + \frac{a}{\pi t_0}\times 2\sin(\pi F t_0)$$

1pt

$$\boxed{= (1+a^2)F + 2aF\,\mathrm{sinc}(\pi F t_0)}$$

Ex3 = cours

0,5 1) $$\boxed{P = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f)\,df}$$

2) réponse harmonique $x(t) = e^{j2\pi f t} \Rightarrow y(t) = x(0) = 1 = e^{j2\pi f t}\,\underbrace{e^{-j2\pi f t}}$

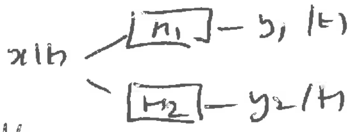
Comme $e^{-j2\pi f t}$ dépend de t, ce n'est pas une opération de filtrage

0,5 linéaire et pourtant l'opération est linéaire

3) si $x(t) = e^{j2\pi f t}$ alors $x'(t) = (j2\pi f)\,e^{j2\pi f t}$ et $x''(t) = -4\pi^2 f^2 e^{j2\pi f t}$

0,5 donc la transmittance est $H(f) = -4\pi^2 f^2$

3



4) La formule des interférences est

$$R_{y_1 y_2}(\tau) = \int H_1(f)\, H_2^*(f)\, e^{j2\pi f\tau}\, S_x(f)\, df$$

0,5

Donc si H_1 et H_2 sont deux canaux disjoints, on a $H_1(f)\, H_2^*(f) = 0 \ \forall f$

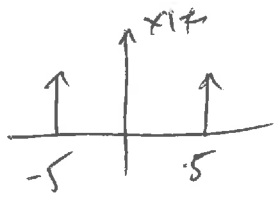
$\Rightarrow R_{y_1 y_2}(t) = 0 \Rightarrow$ les signaux y_1 et y_2 sont décorrélés

5) la formule d'interpolation de Shannon sert à reconstruire un signal $x(t)$ à partir du signal échantillonné $x_e(t)$ à l'aide d'une interpolation

0,5 Plus précisément, le signal reconstruit s'écrit

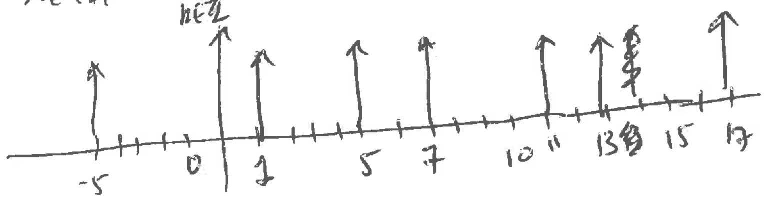
$$x_r(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x(kTe)\ \mathrm{sinc}\left[\pi Fe(t - kTe)\right]$$

6)



donc

$$X_e(f) = Fe \sum_{k \in \mathbb{Z}} X(f - kFe)$$



0,5

7) le filtre antirepliement est un filtre analogique qui élimine les fréquences ~~inutiles avec~~ supérieures à la fréquence maximale du signal d'intérêt avant échantillonnage pour éviter que ces hautes fréquences ne se replient dans la bande d'intérêt après échantillonnage

0,5

8) On utilise le théorème de Price

$$\frac{\partial R_y(\tau)}{\partial R_x(\tau)} = E\Big[\underbrace{\frac{dy(t)}{dx(t)}}_{g'[x(t)]}\ \underbrace{\frac{dy(t-\tau)}{dx(t-\tau)}}_{g'[x(t-\tau)]}\Big]$$

0,5

Quand on a calculé le membre de droite, on intègre et on en déduit $R_y(\tau)$ à une constante additive près.