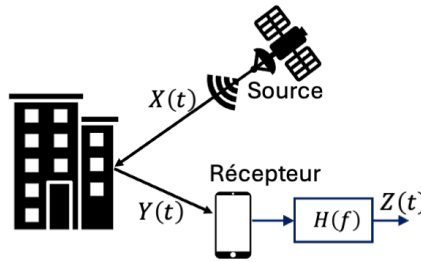

EXAMEN TRAITEMENT DU SIGNAL - 1SN

Lundi 16 février 2025, 8h00-9h30

Partiel sans document (Une feuille A4 recto-verso autorisée)

Exercice 1 : Réduction d'interférences (6 points)

On considère le système représenté sur la figure ci-dessous dans lequel le signal $X(t)$ est supposé réel aléatoire stationnaire de moyenne $E[X(t)] = m$ et de fonction d'autocorrélation $R_X(\tau) = e^{-\lambda|\tau|}$, $\tau \in \mathbb{R}$ et où le signal reçu est $Y(t) = X(t) + aX(t - T)$ avec $0 < a < 1$ et $T > 0$, où T est un retard lié au temps de propagation entre la source et le récepteur et a est un facteur d'atténuation.



- Déterminer la moyenne du signal $Y(t)$, sa fonction d'autocorrélation $R_Y(\tau)$ et sa densité spectrale de puissance $s_Y(f)$ en fonction des données du problème. Le signal $Y(t)$ est-il stationnaire ? (3pts).

La moyenne du signal $Y(t)$ est

$$E[Y(t)] = m(1 + a).$$

La fonction d'autocorrélation de $Y(t)$ est

$$\begin{aligned} R_Y(\tau) &= E[Y(t)Y(t - \tau)] \\ &= E\{[X(t) + aX(t - T)][X(t - \tau) + aX(t - T - \tau)]\} \\ &= R_X(\tau) + aR_X(\tau - T) + aR_X(\tau + T) + a^2R_X(\tau) \\ &= (1 + a^2)R_X(\tau) + aR_X(\tau - T) + aR_X(\tau + T). \end{aligned} \quad (1)$$

avec $R_X(\tau) = e^{-\lambda|\tau|}I_{\mathbb{R}^+}(\tau)$. La densité spectrale de $Y(t)$ est donc

$$\begin{aligned} s_Y(f) &= \text{TF}[R_Y(\tau)] \\ &= (1 + a^2)s_X(f) + ae^{-j2\pi fT}s_X(f) + ae^{j2\pi fT}s_X(f) \\ &= [1 + a^2 + 2a\cos(2\pi fT)]s_X(f) \\ &= [1 + a^2 + 2a\cos(2\pi fT)]\frac{2\lambda}{\lambda^2 + 4\pi^2 f^2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Comme $E[Y(t)]$ et $E[Y(t)Y(t - \tau)]$ ne dépendent pas de t , le signal $Y(t)$ est stationnaire.

- Le signal $X(t - T)$ peut être considéré comme une interférence que l'on cherche à atténuer. On forme le signal $Z(t) = Y(t) - aY(t - T)$. Montrer que $Z(t)$ peut être obtenu par filtrage linéaire de $X(t)$ par un filtre dont on déterminera la réponse impulsionnelle $h(t)$ et la transmittance $H(f)$. En déduire la densité spectrale de puissance de $Z(t)$ notée $s_Z(f)$ et sa fonction d'autocorrélation $R_Z(\tau)$. Expliquer pourquoi l'interférence est moins visible sur $R_Z(\tau)$ que sur $R_Y(\tau)$ (3pts).

Il a plusieurs manières de montrer que $Z(t)$ peut être obtenu par filtrage linéaire de $X(t)$. On peut par exemple déterminer la réponse harmonique du système. Si $X(t) = e^{j2\pi ft}$ alors $Y(t) = X(t) + aX(t - T) = e^{j2\pi ft} [1 + ae^{-j2\pi fT}]$. De plus, comme $Z(t) = Y(t) - aY(t - T)$, on a

$$\begin{aligned} Z(t) &= e^{j2\pi ft} [1 + ae^{-j2\pi fT}] - ae^{j2\pi f(t-T)} [1 + ae^{-j2\pi fT}] \\ &= e^{j2\pi ft} \left\{ 1 + ae^{-j2\pi fT} - ae^{-j2\pi fT} [1 + ae^{-j2\pi fT}] \right\} \\ &= e^{j2\pi ft} [1 - a^2 e^{-j2\pi f(2T)}] \\ &= e^{j2\pi ft} H(f). \end{aligned} \quad (3)$$

Comme $H(f)$ ne dépend pas de t , $Z(t)$ est obtenu par filtrage de $X(t)$ l'aide d'un filtre de transmittance

$$H(f) = 1 - a^2 e^{-j2\pi f(2T)}.$$

Une autre manière plus directe est la suivante :

$$\begin{aligned} Z(t) &= Y(t) - aY(t - T) \\ &= X(t) + aX(t - T) - a[X(t - T) + aX(t - 2T)] \\ &= X(t) - a^2 X(t - 2T) \\ &= X(t) * [\delta(t) - a^2 \delta(t - 2T)]. \end{aligned} \quad (4)$$

Le signal $Z(t)$ peut être obtenu par filtrage linéaire de $X(t)$ avec un filtre de réponse impulsionnelle $h(t) = \delta(t) - a^2 \delta(t - 2T)$ et de transmittance $H(f) = 1 - a^2 e^{-j4\pi fT}$. On en déduit d'après la relation de Wiener-Lee

$$s_Z(f) = s_X(f) |1 - a^2 e^{-j4\pi fT}|^2 = s_X(f) [1 + a^4 - a^2 e^{-j4\pi fT} - a^2 e^{j4\pi fT}],$$

d'où

$$\begin{aligned} R_Z(\tau) &= R_X(\tau) * [(1 + a^4)\delta(\tau) - a^2 \delta(\tau - 2T) - a^2 \delta(\tau + 2T)] \\ &= (1 + a^4)R_X(\tau) - a^2 R_X(\tau - 2T) - a^2 R_X(\tau + 2T). \end{aligned} \quad (5)$$

Comme $|a| < 1$, les interférences $R_X(\tau - 2T)$ et $R_X(\tau + 2T)$ sont d'amplitudes plus faibles dans $R_Z(\tau)$ que dans $R_Y(\tau)$ et en plus elles sont plus distantes de la partie liée à $R_X(\tau)$ ce qui permet de les éliminer plus facilement.

Exercice 2 : Puissance quatrième d'un signal aléatoire (4 points)

On considère une non-linéarité g appliquée à un processus gaussien réel $X(t)$ stationnaire de moyenne nulle et de fonction d'autocorrélation $R_X(\tau)$:

$$Y(t) = g[X(t)] = X^4(t)$$

et on s'intéresse à la fonction d'autocorrélation de $Y(t)$ notée $R_Y(\tau)$. On rappelle que pour un tel processus, la loi du couple $(U, V) = (X(t), X(t - \tau))$ est gaussienne de densité de probabilité

$$f_{\Sigma}(u, v) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det \Sigma}} \exp \left[-\frac{1}{2}(u, v)\Sigma^{-1}(u, v)^T \right]$$

où $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ et où Σ est la matrice de covariance du couple (U, V) définie par

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \text{var}(U) & \text{cov}(U, V) \\ \text{cov}(U, V) & \text{var}(V) \end{pmatrix}$$

1. Exprimer les éléments de Σ en fonction de $R_X(\tau)$ et $R_X(0)$. En déduire que la fonction d'autocorrélation $R_Y(\tau) = E[Y(t)Y(t-\tau)]$ ne dépend que de $R_X(\tau)$ et de $R_X(0)$. (1pt)

La première partie de cette question est très classique et a été vue en cours :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} R_X(0) & R_X(\tau) \\ R_X(\tau) & R_X(0) \end{pmatrix}.$$

De plus

$$\begin{aligned} R_Y(\tau) &= E[Y(t)Y^*(t-\tau)] \\ &= E\{g[X(t)]g[X(t-\tau)]\} \\ &= \int \int g(u)g(v)f_{\Sigma}(u,v)dudv. \end{aligned}$$

La fonction d'autocorrélation $R_Y(\tau)$ ne dépend donc que des éléments de Σ , c'est-à-dire de $R_X(\tau)$ et de $R_X(0)$.

2. On rappelle que la fonction d'autocorrélation du signal $X^3(t)$ est définie par $R_3(\tau) = 6R_X^3(\tau) + 9R_X^2(0)R_X(\tau)$. En utilisant le théorème de Price, déterminer la fonction d'autocorrélation $R_Y(\tau)$ en fonction de $R_X(\tau)$ à une constante additive près notée C (2pts).

D'après le théorème de Price

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_Y(\tau)}{\partial R_X(\tau)} &= E \left[\frac{\partial Y(t)}{\partial X(t)} \frac{\partial Y(t-\tau)}{\partial X(t-\tau)} \right] \\ &= E [4X^3(t) \times 4X^3(t-\tau)] \\ &= 16R_3(\tau) = 96R_X^3(\tau) + 144R_X^2(0)R_X(\tau). \end{aligned}$$

Par intégration, on obtient

$$R_Y(\tau) = 24R_X^4(\tau) + 72R_X^2(0)R_X^2(\tau) + C.$$

3. On rappelle que les moments d'un signal Gaussien de moyenne nulle $X(t)$ vérifient la relation

$$m_{2n} = E[X^{2n}(t)] = [(2n-1)(2n-3) \times \dots \times 5 \times 3 \times 1] R_X^n(0).$$

En déduire la constante additive C (1pt).

On a

$$C = R_Y(0) - 24R_X^4(0) - 72R_X^2(0)R_X^2(0).$$

Mais

$$R_Y(0) = E[Y^2(t)] = E[X^8(t)] = (7 \times 5 \times 3)R_X^4(0),$$

donc

$$C = (105 - 24 - 72)R_X^4(0) = 9R_X^4(0),$$

d'où

$$R_Y(\tau) = 24R_X^4(\tau) + 72R_X^2(0)R_X^2(\tau) + 9R_X^4(0).$$

Transformée de Fourier

$$X(f) = \int_{\mathbb{R}} x(t) e^{-i2\pi f t} dt \quad x(t) = \int_{\mathbb{R}} X(f) e^{i2\pi f t} df$$

T.F.

$x(t)$ réelle paire	$\Leftrightarrow$	$X(f)$ réelle paire
$x(t)$ réelle impaire	$\Leftrightarrow$	$X(f)$ imaginaire pure impaire
$x(t)$ réel	$\Leftrightarrow$	$\begin{cases} \text{Re}\{X(f)\} \text{ paire} \\ \text{Im}\{X(f)\} \text{ impaire} \\ X(f) \text{ pair} \\ \arg\{X(f)\} \text{ impaire} \end{cases}$
$ax(t) + by(t)$	$\Leftrightarrow$	$aX(f) + bY(f)$
$x(t - t_0)$	$\Leftrightarrow$	$X(f) e^{-i2\pi f t_0}$
$x(t) e^{+i2\pi f_0 t}$	$\Leftrightarrow$	$X(f - f_0)$
$x^*(t)$	$\Leftrightarrow$	$X^*(-f)$
$x(t) \cdot y(t)$	$\Leftrightarrow$	$X(f) * Y(f)$
$x(t) * y(t)$	$\Leftrightarrow$	$X(f) \cdot Y(f)$
$x(at)$	$\Leftrightarrow$	$\frac{1}{ a } X\left(\frac{f}{a}\right)$
$\frac{dx^{(n)}(t)}{dt^n}$	$\Leftrightarrow$	$(i2\pi f)^n X(f)$
$(-i2\pi t)^n x(t)$	$\Leftrightarrow$	$\frac{dX^{(n)}(f)}{df^n}$

Formule de Parseval

$$\int_{\mathbb{R}} x(t) y^*(t) dt = \int_{\mathbb{R}} X(f) Y^*(f) df$$

$$\int_{\mathbb{R}} |x(t)|^2 dt = \int_{\mathbb{R}} |X(f)|^2 df$$

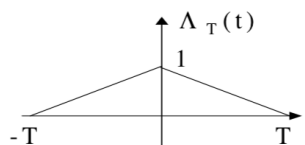
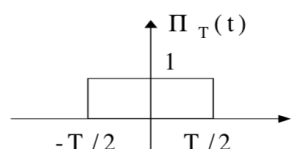
Série de Fourier

$$x(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{+i2\pi n f_0 t} \Leftrightarrow X(f) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \delta(f - n f_0)$$

avec $c_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-i2\pi n f_0 t} dt$

T.F.

1	$\Leftrightarrow$	$\delta(f)$
$\delta(t)$	$\Leftrightarrow$	1
$e^{+i2\pi f_0 t}$	$\Leftrightarrow$	$\delta(f - f_0)$
$\delta(t - t_0)$	$\Leftrightarrow$	$e^{-i2\pi f t_0}$
$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(t - kT)$	$\Leftrightarrow$	$\frac{1}{T} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(f - \frac{k}{T})$
$\cos(2\pi f_0 t)$	$\Leftrightarrow$	$\frac{1}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$
$\sin(2\pi f_0 t)$	$\Leftrightarrow$	$\frac{1}{2i} [\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)]$
$e^{-a t }$	$\Leftrightarrow$	$\frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 f^2}$
$\frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 f^2}$	$\Leftrightarrow$	$e^{-a f }$
$e^{-at} \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(t)$	$\Leftrightarrow$	$\frac{1}{a + 2i\pi f}$
$\frac{t^n}{n!} e^{-at} \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(t)$	$\Leftrightarrow$	$\frac{1}{(a + 2i\pi f)^{n+1}}$
$e^{-\pi t^2}$	$\Leftrightarrow$	$e^{-\pi f^2}$
$e^{-a^2 t^2}$	$\Leftrightarrow$	$\frac{\sqrt{\pi}}{a} \exp(-\frac{\pi^2 f^2}{a^2})$
$\Pi_T(t)$	$\Leftrightarrow$	$T \frac{\sin(\pi T f)}{\pi T f} = T \text{sinc}(\pi T f)$
$\Lambda_T(t)$	$\Leftrightarrow$	$T \text{sinc}^2(\pi T f)$
$B \text{sinc}(\pi B t)$	$\Leftrightarrow$	$\Pi_B(f)$
$B \text{sinc}^2(\pi B t)$	$\Leftrightarrow$	$\Lambda_B(f)$



!!!!!! Attention !!!!!

$\Pi_T(t)$ est de support égal à T .

$\Lambda_T(t)$ est de support égal à $2T$

et on a $\Pi_T(t) * \Pi_T(t) = T \Lambda_T(t)$

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \neq 0 \\ +\infty & \text{si } t = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} \delta(t) dt = 1$$

$$\delta(t - t_0) f(t) = \delta(t - t_0) f(t_0)$$

$$\delta(t - t_0) * f(t) = f(t - t_0)$$