

## Contents

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Signaux aléatoires stationnaires</b>   | <b>3</b>  |
| 1.1      | Rappels . . . . .   | 3         |
| 1.1.1    | Transformée de Fourier . . . . .  | 3         |
| 1.1.2    | Signaux déterministes à énergie finie . . . . .   | 4         |
| 1.1.3    | Signaux déterministes périodiques à puissance finie . . . . .                                     | 4         |
| 1.1.4    | Signaux déterministes non périodiques à puissance finie . . . . .                                 | 5         |
| 1.2      | Signaux aléatoires stationnaires . . . . .  | 5         |
| 1.2.1    | Définition . . . . .  | 5         |
| 1.2.2    | Liens entre densité spectrale et transformée de Fourier . . . . .                                 | 6         |
| 1.2.3    | Exemples . . . . .  | 6         |
| 1.2.4    | Propriétés de $R_x(\tau)$ et $s_x(f)$ pour un signal aléatoire stationnaire . . . . .             | 7         |
| 1.3      | Ergodicité . . . . .  | 7         |
| 1.3.1    | Généralités . . . . .   | 7         |
| 1.3.2    | Exemples . . . . .  | 8         |
| 1.3.3    | Théorème . . . . .  | 9         |
| 1.3.4    | Résultats intéressants . . . . .  | 12        |
| 1.4      | Exercices sur les signaux stationnaires . . . . .   | 12        |
| 1.4.1    | Exponentielle complexe d'amplitude uniforme et de fréquence aléatoire de loi de Laplace . . . . . | 12        |
| 1.4.2    | Ergodicité de la somme de deux signaux . . . . .  | 13        |
| 1.4.3    | Exponentielle complexe de fréquence et phase aléatoires . . . . .                                 | 14        |
| 1.4.4    | Exponentielle complexe d'amplitude binaire et de fréquence aléatoire de loi uniforme . . . . .    | 15        |
| 1.4.5    | Prédiction pour un signal aléatoire stationnaire . . . . .  | 16        |
| <b>2</b> | <b>Filtrage linéaire</b>  | <b>17</b> |
| 2.1      | Rappels . . . . .   | 17        |
| 2.2      | Filtrage des signaux aléatoires . . . . .   | 17        |
| 2.3      | Identification d'une opération de filtrage linéaire . . . . .                                     | 17        |
| 2.3.1    | Définition . . . . .  | 17        |
| 2.3.2    | Exemples . . . . .  | 18        |
| 2.4      | Relations de Wiener-Lee . . . . .   | 19        |
| 2.5      | Filtrage adapté . . . . .   | 20        |
| 2.5.1    | Définition . . . . .  | 20        |
| 2.5.2    | Expression du filtre . . . . .  | 21        |
| 2.5.3    | SNR maximum . . . . .   | 21        |
| 2.5.4    | Applications . . . . .  | 21        |
| 2.5.5    | Référence . . . . .   | 22        |
| 2.6      | Filtrage de Wiener . . . . .  | 22        |
| 2.6.1    | Définition . . . . .  | 22        |
| 2.6.2    | Expression du filtre . . . . .  | 22        |
| 2.6.3    | Expression du filtre . . . . .  | 23        |
| 2.6.4    | Applications . . . . .  | 23        |
| 2.7      | Exercices sur le filtrage de signaux aléatoires . . . . .   | 25        |

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| 2.7.1    | Filtre adapté . . . . .                                       | 25        |
| 2.7.2    | Dérivées d'un signal aléatoire . . . . .                      | 25        |
| 2.7.3    | Filtrage par intégration . . . . .                            | 26        |
| 2.7.4    | Annulation d'échos . . . . .                                  | 27        |
| 2.7.5    | Sinus bruité . . . . .  | 29        |
| 2.7.6    | Système à deux trajets . . . . .                              | 30        |
| 2.7.7    | Formule de Benett . . . . .                                   | 31        |
| 2.7.8    | Filtrage adapté . . . . .                                     | 33        |
| 2.7.9    | Variance d'Allan . . . . .                                    | 37        |
| <b>3</b> | <b>Echantillonnage</b>  | <b>41</b> |
| 3.1      | Rappels . . . . .   | 41        |
| 3.2      | Généralisation aux signaux aléatoires stationnaires . . . . . | 41        |
| <b>4</b> | <b>Traitements non-linéaires</b>                              | <b>43</b> |
| 4.1      | Théorème de Price . . . . .                                   | 43        |
| 4.2      | Exemple d'application : le quadrateur . . . . .               | 43        |
| 4.3      | Autre exemple d'application : théorème de Van Vleck . . . . . | 44        |
| 4.4      | Exercices . . . . .   | 45        |
| 4.4.1    | Non-linéarité exponentielle . . . . .                         | 45        |
| 4.4.2    | Nonlinéarité Relu . . . . .                                   | 46        |
| 4.4.3    | Filtre exponentiel . . . . .                                  | 47        |
| 4.4.4    | Nonlinéarité cubique . . . . .                                | 48        |
| 4.4.5    | Puissance quatrième d'un signal aléatoire . . . . .           | 49        |
| 4.4.6    | Écrêtage progressif d'un signal aléatoire . . . . .           | 50        |
| 4.4.7    | Amplificateur Klystron . . . . .                              | 51        |
| 4.5      | Ecrêtage dur d'un signal aléatoire . . . . .                  | 53        |
| <b>5</b> | <b>Processus de Poisson homogène</b>                          | <b>55</b> |
| 5.1      | Définition . . . . .  | 55        |
| 5.2      | Propriétés . . . . .  | 55        |
| 5.3      | Signal des télégraphistes . . . . .                           | 55        |
| <b>6</b> | <b>Annexes</b>  | <b>57</b> |
| 6.1      | Preuve du théorème de Price . . . . .                         | 57        |

# 1 Signaux aléatoires stationnaires

En première année, vous vous êtes intéressés à plusieurs classes de signaux déterministes pour lesquelles vous avez défini trois quantités intéressantes en traitement du signal : la fonction d'autocorrélation, la fonction d'intercorrrelation et la densité spectrale de puissance. Après avoir rappelé rapidement les définitions de ces quantités, ce paragraphe étendra ces définitions aux signaux aléatoires stationnaires.

## 1.1 Rappels

### 1.1.1 Transformée de Fourier

#### Propriétés générales

| T.F.                       |   |
|----------------------------|---|
| $ax(t) + by(t)$            | $\Leftrightarrow aX(f) + bY(f)$   |
| $x(t - t_0)$               | $\Leftrightarrow X(f)e^{-i2\pi ft_0}$   |
| $x(t)e^{+i2\pi f_0 t}$     | $\Leftrightarrow X(f - f_0)$  |
| $x^*(t)$                   | $\Leftrightarrow X^*(-f)$   |
| $x(t) \cdot y(t)$          | $\Leftrightarrow X(f) * Y(f)$   |
| $x(t) * y(t)$              | $\Leftrightarrow X(f) \cdot Y(f)$   |
| $x(at + b)$                | $\Leftrightarrow \frac{1}{ a } X\left(\frac{f}{a}\right) e^{i2\pi \frac{b}{a} f}$ |
| $\frac{dx^{(n)}(t)}{dt^n}$ | $\Leftrightarrow (i2\pi f)^n X(f)$  |
| $(-i2\pi t)^n x(t)$        | $\Leftrightarrow \frac{dX^{(n)}(f)}{df^n}$  |

| Formule de Parseval   | Série de Fourier   |
|---|--|
| $\int_{\mathbb{R}} x(t)y^*(t)dt = \int_{\mathbb{R}} X(f)Y^*(f)df$ | $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{+i2\pi n f_0 t} \Leftrightarrow \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \delta(f - n f_0)$ |
| $\int_{\mathbb{R}}  x(t) ^2 dt = \int_{\mathbb{R}}  X(f) ^2 df$   |  |

#### Table de Transformées de Fourier

| T.F.   |  |
|--|--|
| 1  | $\Leftrightarrow \delta(f)$  |
| $\delta(t)$  | $\Leftrightarrow 1$  |
| $e^{+i2\pi f_0 t}$   | $\Leftrightarrow \delta(f - f_0)$  |
| $\delta(t - t_0)$  | $\Leftrightarrow e^{-i2\pi f t_0}$   |
| $\text{III}_T(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(t - kT)$ | $\Leftrightarrow \frac{1}{T} \text{III}_{1/T}(f)$                          |
| $\cos(2\pi f_0 t)$   | $\Leftrightarrow \frac{1}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$          |
| $\sin(2\pi f_0 t)$   | $\Leftrightarrow \frac{1}{2i} [\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)]$         |
| $e^{-a t }$  | $\Leftrightarrow \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 f^2}$                              |
| $e^{-\pi t^2}$   | $\Leftrightarrow e^{-\pi f^2}$   |
| $\Pi_T(t)$   | $\Leftrightarrow T \frac{\sin(\pi T f)}{\pi T f} = T \text{sinc}(\pi T f)$ |
| $\Lambda_T(t)$   | $\Leftrightarrow T \text{sinc}^2(\pi T f)$                                 |
| $B \text{sinc}(\pi B t)$                                   | $\Leftrightarrow \Pi_B(f)$   |
| $B \text{sinc}^2(\pi B t)$                                 | $\Leftrightarrow \Lambda_B(f)$   |

!!!!!! Attention !!!!!

$\Pi_T(t)$  note une fenêtre rectangulaire de support égal à  $T$ .

$\Lambda_T(t)$  note une fenêtre triangulaire de support égal à  $2T$  (de demi-base égale à  $T$ ).

$$\Pi_T(t) * \Pi_T(t) = T \Lambda_T(t)$$

### 1.1.2 Signaux déterministes à énergie finie

On dit qu'un signal à temps continu  $x(t)$  est à énergie finie si

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt < \infty.$$

Pour un signal à énergie finie  $x(t)$ , on peut définir sa fonction d'autocorrélation  $R_x(\tau)$  et sa densité spectrale d'énergie comme suit

$$\text{Fonction d'autocorrélation : } R_x(\tau) = \int_{\mathbb{R}} x(t)x^*(t-\tau) dt$$

et

$$\text{Densité spectrale d'énergie : } s_x(f) = \text{TF}[R_x(\tau)] = \int_{\mathbb{R}} R_x(\tau) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau$$

où  $x^*(t)$  désigne le complexe conjugué du signal  $x(t)$ . On notera que  $R_x(\tau)$  est le produit scalaire entre les deux signaux  $x(t)$  et  $x(t-\tau)$ , i.e.,  $R_x(\tau) = \langle x(t), x(t-\tau) \rangle$  si on définit

$$\langle u(t), v(t) \rangle = \int_{\mathbb{R}} u(t)v^*(t) dt$$

qui est le produit scalaire des signaux à énergie finie. La fonction d'intercorrélation entre deux signaux à énergie finie  $x(t)$  et  $y(t)$  est alors définie par le produit scalaire entre  $x(t)$  et  $y(t-\tau)$ , i.e.,

$$\text{Fonction d'intercorrélation : } R_{xy}(\tau) = \langle x(t), y(t-\tau) \rangle = \int_{\mathbb{R}} x(t)y^*(t-\tau) dt$$

et on remarquera que  $E = R_x(0) = \langle x(t), x(t) \rangle$ .

### 1.1.3 Signaux déterministes périodiques à puissance finie

On dit qu'un signal à temps continu  $x(t)$  est à puissance finie périodique de période  $T$  si  $x(t+T) = x(t), \forall t$  (périodicité de période  $T$ ) et si

$$P = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt < \infty.$$

On remarquera que si  $x(t)$  est à énergie finie, alors sa puissance est nulle. Par ailleurs, si  $x(t)$  est à puissance finie périodique, alors son énergie est infinie. On peut définir un produit scalaire pour les signaux périodiques à puissance finie comme suit

$$\langle u(t), v(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(t)v^*(t) dt.$$

Il est donc assez naturel de définir les fonctions d'autocorrélation et d'intercorrélation et la densité spectrale de puissance d'un signal périodique à puissance finie comme suit

$$\text{Fonction d'autocorrélation : } R_x(\tau) = \langle x(t), x(t-\tau) \rangle = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)x^*(t-\tau) dt,$$

$$\text{Fonction d'intercorrélation : } R_{xy}(\tau) = \langle x(t), y(t-\tau) \rangle = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)y^*(t-\tau) dt$$

et

$$\text{Densité spectrale de puissance : } s_x(f) = \text{TF}[R_x(\tau)] = \int_{\mathbb{R}} R_x(\tau) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau.$$

### 1.1.4 Signaux déterministes non périodiques à puissance finie

La dernière classe de signaux déterministes que vous avez étudiée l'année dernière est la classe des signaux déterministes non périodiques à puissance finie qui vérifient

$$P = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt < \infty.$$

Ces signaux admettent le produit scalaire

$$\langle u(t), v(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(t)v^*(t) dt$$

et donc

$$\text{Fonction d'autocorrélation : } R_x(\tau) = \langle x(t), x(t - \tau) \rangle = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)x^*(t - \tau) dt,$$

$$\text{Fonction d'intercorrélation : } R_{xy}(\tau) = \langle x(t), y(t - \tau) \rangle = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)y^*(t - \tau) dt$$

et

$$\text{Densité spectrale de puissance : } s_x(f) = \text{TF}[R_x(\tau)] = \int_{\mathbb{R}} R_x(\tau) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau.$$

## 1.2 Signaux aléatoires stationnaires

### 1.2.1 Définition

Cette année, nous allons étudier une classe de signaux aléatoires très utile pour les applications pratiques qui regroupe les signaux **stationnaires au sens large** (appelés aussi **stationnaires à l'ordre 2**) et que nous appellerons par simplicité **signaux stationnaires** vérifiant

$$E[x(t)] = m \quad (\text{moyenne indépendante du temps})$$

et

$$E[x(t)x^*(t - \tau)] = R_x(\tau) \quad (\text{quantité indépendante du temps}).$$

La première propriété indique que la moyenne probabiliste du signal  $x(t)$  à un instant donné  $t$  ne dépend pas de cet instant  $t$  et est donc égale à une constante notée  $m$ , ce qui fait penser à un régime permanent ou à une sorte de stationnarité appelée stationnarité à l'ordre 1. La seconde propriété indique que le lien entre  $x(t)$  et  $x(t - \tau)$  (défini par  $E[x(t)x^*(t - \tau)]$ , ce qui sera expliqué plus tard) ne dépend que de  $\tau$ , qui est la largeur de l'intervalle  $|t - \tau, t|$  ou  $|t, t - \tau|$  (suivant le signe de  $\tau$ ). On supposera que  $m$  et  $R_x(\tau)$  sont des quantités bien définies, ce qui est le cas pour les signaux vérifiant

$$P = E[|x(t)|^2] < \infty$$

appelés **signaux aléatoires à puissance moyenne finie**. Cette classe de signaux admet un produit scalaire

$$\langle u(t), v(t) \rangle = E[u(t)v^*(t)]$$

et donc on peut définir

$$\text{Fonction d'autocorrélation : } R_x(\tau) = \langle x(t), x(t - \tau) \rangle = E[x(t)x^*(t - \tau)],$$

$$\text{Fonction d'intercorrélation : } R_{xy}(\tau) = \langle x(t), y(t - \tau) \rangle = E[x(t)y^*(t - \tau)]$$

et

$$\text{Densité spectrale de puissance : } s_x(f) = \text{TF}[R_x(\tau)] = \int_{\mathbb{R}} R_x(\tau) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau.$$

Le spectre des signaux aléatoires stationnaires est donc naturellement défini par cette densité spectrale de puissance  $s_x(f) = \text{TF}[R_x(\tau)]$  avec  $R_x(\tau) = \langle x(t), x(t - \tau) \rangle = E[x(t)x^*(t - \tau)]$ .

### 1.2.2 Liens entre densité spectrale et transformée de Fourier

Vous avez vu l'année dernière que pour un **signal à énergie finie**, on a

$$s_x(f) = |X(f)|^2$$

où  $X(f) = \text{TF}[x(t)] = \int_{\mathbb{R}} x(t) \exp(-j2\pi ft) dt$  est la transformée de Fourier du signal  $x(t)$  (qui existe pour tout signal à énergie finie). La densité spectrale d'énergie est donc homogène au module carré d'une transformée de Fourier.

Pour les signaux **périodiques à puissance finie**, on a

$$s_x(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2 \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

où les coefficients  $c_k$  sont obtenus par décomposition en série de Fourier du signal périodique  $x(t)$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \exp(-j2k\pi ft).$$

Comme

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \delta\left(f - \frac{k}{T}\right),$$

on observe que les coefficients des raies spectrales de la densité spectrale de puissance d'un signal périodique sont homogènes aux modules des carrés des coefficients de sa transformée de Fourier.

Pour les signaux **aléatoires stationnaires**, on admettra que

$$s_x(f) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} E [|X_T(f)|^2]$$

avec

$$X_T(f) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \exp(-j2\pi ft) dt,$$

ce qui indique que  $s_x(f)$  est une quantité positive homogène au module carré d'une transformée de Fourier calculée sur une fenêtre  $]-\frac{T}{2}, +\frac{T}{2}[$ . **Mais on montrerait que la transformée de Fourier d'un signal aléatoire stationnaire n'est pas définie !!**

### 1.2.3 Exemples

- **Exemple 1 : Sinusoïde**

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \theta)$$

$\theta$  va uniforme sur  $[0, 2\pi]$ .

- **Fonction d'autocorrélation**

$$R_x(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f_0 \tau)$$

- **Densité spectrale de puissance**

$$s_x(f) = \frac{A^2}{4} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$$

- **Exemple 2 : bruit blanc**

- **Fonction d'autocorrélation**

$$R_x(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau)$$

- **Densité spectrale de puissance**

$$s_x(f) = \frac{N_0}{2}$$

## 1.2.4 Propriétés de $R_x(\tau)$ et $s_x(f)$ pour un signal aléatoire stationnaire

### 1. Fonction d'autocorrélation

- **Symétrie hermitienne**

$$R_x^*(-\tau) = \text{conjugué de } E[x(t)x^*(t+\tau)] = E[x^*(t)x(t+\tau)] = E[x(t+\tau)x^*(t)] = R_x(\tau).$$

- **Valeur maximale à l'origine**

$$|R_x(\tau)| \leq R_x(0)$$

Appliquer inégalité de Cauchy Schwartz.

- **distance entre  $x(t)$  et  $x(t - \tau)$**

$$\begin{aligned} d^2[x(t), x(t - \tau)] &= \|x(t) - x(t - \tau)\|^2 \\ &= \langle x(t) - x(t - \tau), x(t) - x(t - \tau) \rangle \\ &= R_x(0) - R_x(\tau) - R_x(-\tau) + R_x(0) \\ &= 2[R_x(0) - \text{Re}\{R_x(\tau)\}] \end{aligned} \quad (1)$$

donc  $R_x(\tau)$  mesure le lien entre  $x(t)$  et  $x(t - \tau)$ .

- $R_x(\tau) = R_1(\tau) + R_2(\tau)$ , où  $R_1(\tau)$  est une somme de fonctions périodiques et  $R_2(\tau)$  est une fonction qui tend vers 0 lorsque  $|\tau| \rightarrow \infty$  (voir [1, Section 4.9] pour plus de détails). On notera que le fait que  $R_2(\tau)$  tende vers 0 lorsque  $|\tau| \rightarrow \infty$  découle du fait que c'est la transformée de Fourier inverse d'une densité spectrale de puissance et du théorème de Riemann-Lebesgue.

### 2. Densité spectrale de puissance

- $s_x(f) \in \mathbb{R}$

De plus si  $x(t)$  est un signal réel, alors  $R_X(\tau) \in \mathbb{R}$  donc  $s_x(f)$  est **réelle paire**.

- $s_x(f) \geq 0$

En effet  $s_x(f) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} E[|X_T(f)|^2]$ .

- **Intégrale**

$$\int_{\mathbb{R}} s_x(f) df = R_x(0) = \text{Puissance}$$

- $s_x(f) = s_1(f) + s_2(f)$ , où  $s_1(f)$  est un **spectre de raies** et  $s_2(f)$  est un **spectre continu** (décomposition de Lebesgue)

## 1.3 Ergodicité

### 1.3.1 Généralités

Lorsqu'on veut montrer qu'un signal aléatoire  $X(t)$  est stationnaire (au sens large), il faut vérifier que  $E[X(t)]$  et  $E[X(t)X(t - \tau)]$  sont deux quantités indépendantes du temps, ce qui nécessite en pratique de calculer des moyennes statistiques à partir de plusieurs réalisations de  $X(t)$  notées  $X^{(i)}(t)$ ,  $i = 1, \dots, N$  où  $N$  est le nombre de réalisations (appelées parfois trajectoires) de  $X(t)$ . Par exemple pour la moyenne, on peut déterminer la **moyenne statistique** de  $X(t)$  définie par

$$m(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X^{(i)}(t)$$

avec un nombre de réalisations  $N$  suffisamment grand (pour que  $m(t)$  soit une bonne approximation de  $E[X(t)]$ , en vertu de la loi des grands nombres) et vérifier que cette quantité ne fluctue pas trop et peut

donc être considérée comme une constante. Mais cette approche nécessite d'avoir à notre disposition plusieurs réalisations de  $X(t)$ , ce qui peut être contraignant. Dans les applications pratiques, il est évidemment plus simple de déterminer la moyenne de  $X(t)$  à l'aide d'une **moyenne temporelle**

$$\bar{X}_T = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T X(t_i)$$

à partir d'une seule réalisation de  $X(t)$ , où les instants  $t_i$  sont les instants d'échantillonnage de  $X(t)$ . La notion d'ergodicité (au premier ordre pour la moyenne, au second ordre pour la fonction d'autocorrélation, ...) précise dans quelles conditions on peut estimer la moyenne statistique de  $X(t)$  à l'aide de sa moyenne temporelle  $\bar{X}_T$ .

On dit qu'un signal aléatoire à temps continu  $X(t)$  est **ergodique au premier ordre** si

$$Y_T = \frac{1}{T} \int_0^T X(u) du \xrightarrow[T \rightarrow +\infty]{\text{mq}} E[X(t)]$$

c'est-à-dire si la moyenne temporelle  $Y_T$  converge vers la moyenne statistique  $E[X(t)]$  (qui est indépendante de  $t$  pour un signal stationnaire et sera notée  $m$ ). On notera que la limite dans l'équation précédente est calculée au sens de la convergence en moyenne quadratique, c'est-à-dire

$$Y_T \xrightarrow[T \rightarrow +\infty]{\text{mq}} E[X(t)] = m \Leftrightarrow \lim_{T \rightarrow \infty} E[(Y_T - m)^2] = 0.$$

On remarquera que si  $X(t)$  est un signal ergodique au premier ordre, alors

$$E[X(t)] = \lim_{T \rightarrow \infty} Y_T$$

et comme cette limite (au sens de la convergence en moyenne quadratique) ne dépend pas de  $t$ , le signal  $X(t)$  est nécessairement stationnaire au premier ordre. L'inverse est faux, comme nous le verrons sur certains exemples. La propriété d'ergodicité est donc plus forte que la stationnarité.

### 1.3.2 Exemples

- Le secteur

$$X(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \theta)$$

avec  $A = 220\sqrt{2}$ ,  $f_0 = 50\text{Hz}$  et  $\theta$  uniformément répartie sur  $]0, 2\pi[$ . Nous savons que le signal  $X(t)$  est de moyenne nulle  $E[X(t)] = 0$  et de fonction d'autocorrélation  $E[X(t)X(t - \tau)] = \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f_0 \tau)$ . Le signal  $X(t)$  est donc ergodique au premier ordre si

$$Y_T = \frac{1}{T} \int_0^T X(u) du \xrightarrow[T \rightarrow +\infty]{\text{mq}} 0.$$

Mais

$$\begin{aligned} Y_T &= \frac{1}{T} \int_0^T A \cos(2\pi f_0 u + \theta) du \\ &= \left[ \frac{A \sin(2\pi f_0 u + \theta)}{2\pi f_0} \right]_{u=0}^{u=T} \\ &= \frac{A \sin(2\pi f_0 T + \theta) - A \sin(\theta)}{2\pi f_0 T}. \end{aligned} \tag{2}$$

donc

$$|Y_T| \leq \frac{A}{\pi f_0 T}$$



et par suite

$$E[(Y_T - m)^2] = E[Y_T^2] \leq \frac{A^2}{\pi^2 f_0^2 T^2} \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} 0.$$

ce qui prouve que le signal  $X(t)$  est **ergodique au premier ordre**.

- Le carré du secteur

$$\begin{aligned} X(t) &= A \cos^2(2\pi f_0 t + \theta) \\ &= A \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(4\pi f_0 t + 2\theta) \right] \end{aligned}$$

où  $\theta$  est une variable aléatoire uniformément répartie sur  $]0, 2\pi[$  et  $A$  une variable aléatoire de moyenne  $m_A$  et de variance  $\sigma_A^2 > 0$  indépendante de  $\theta$ . La moyenne de  $X(t)$  est alors

$$E[X(t)] = m = \frac{E[A]}{2}.$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned} Y_T &= \frac{A}{2T} \int_0^T [1 + \cos(4\pi f_0 u + 2\theta)] du \\ &= \frac{A}{2} + \frac{A}{2T} \left[ \frac{\sin(4\pi f_0 u + 2\theta)}{4\pi f_0} \right]_{u=0}^{u=T} \\ &= \frac{A}{2} + \frac{A}{2T} \left[ \frac{\sin(4\pi f_0 T + 2\theta) - \sin(2\theta)}{4\pi f_0} \right]. \end{aligned} \quad (3)$$

donc

$$Y_T \xrightarrow[T \rightarrow +\infty]{mq} \frac{A}{2} \neq E[X(t)] = \frac{E[A]}{2}.$$

ce qui prouve que le signal  $X(t)$  **n'est pas ergodique au premier ordre** (sauf si  $A = E[A]$ , ce qui signifie que  $A$  est constante).

- Autres exemples de signaux non-ergodiques

- Amplitude aléatoire

$$X(t) = V$$

avec  $V$  variable aléatoire uniforme sur  $]0, V_0[$  (avec par exemple  $V_0 = 10$  volts).

- Modulation du secteur

$$Z(t) = X(t) \exp(-j2\pi f_0 t)$$

avec  $X(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \theta)$  le secteur défini ci-dessus.

### 1.3.3 Théorème

#### Énoncé

Pour un processus aléatoire stationnaire au sens large  $X(t)$  de moyenne  $E[X(t)] = m$ , de fonction d'autocorrélation  $R_X(\tau) = E[X(t)X^*(t - \tau)]$  et de densité spectrale de puissance  $s_X(f) = TF[R_X(\tau)]$ , on a

$$\boxed{Y_T = \frac{1}{T} \int_0^T X(u) du \xrightarrow[T \rightarrow +\infty]{mq} m \Leftrightarrow \Delta S_X(0) = |m|^2} \quad (4)$$

avec  $\Delta S_X(0) = S_X(0^+) - S_X(0^-)$  et  $s_X(f) = \frac{dS_X(f)}{df}$ .

#### Preuve

Comme

$$E[|Y_T - m|^2] = E[Y_T Y_T^*] - |m|^2$$

il suffit de montrer que

$$E [Y_T Y_T^*] = \Delta S_X (0).$$

Par utilisation de l'isométrie fondamentale  $X(t) \leftrightarrow e^{j2\pi ft}$ , on a

$$\begin{aligned} E [Y_T Y_T^*] &= \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{e^{j2\pi ft} - 1}{j2\pi fT} \right|^2 s_X(f) df \\ &= \int_{-\infty}^{-\frac{1}{\sqrt{T}}} + \int_{-\frac{1}{\sqrt{T}}}^{\frac{1}{\sqrt{T}}} + \int_{\frac{1}{\sqrt{T}}}^{+\infty} \left| \frac{e^{j2\pi fT} - 1}{j2\pi fT} \right|^2 s_X(f) df \\ &= I_1 + I_2 + I_3 \end{aligned}$$

On exprime alors les trois intégrales comme suit

Intégrale  $I_3$

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_{\frac{1}{\sqrt{T}}}^{+\infty} \left| \frac{e^{j2\pi fT} - 1}{j2\pi fT} \right|^2 s_X(f) df \\ &\leq \int_{\frac{1}{\sqrt{T}}}^{+\infty} \frac{4}{4\pi^2 f^2 T^2} s_X(f) df \\ &\leq \frac{1}{\pi^2 T} \int_{\frac{1}{\sqrt{T}}}^{+\infty} s_X(f) df \leq \frac{R_X(0)}{\pi^2 T} \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

où  $R_X(\tau)$  est la fonction d'autocorrélation du signal  $X(t)$ .

Intégrale  $I_1$

Résultat similaire après changement de variables  $u = -f$ .

Intégrale  $I_2$

$$I_2 = \int_{-\frac{1}{\sqrt{T}}}^{\frac{1}{\sqrt{T}}} \left| \frac{e^{j2\pi fT} - 1}{j2\pi fT} \right|^2 dS_X(f)$$

On pose

$$\tilde{S}_X(f) = \begin{cases} S_X(f) & f < 0 \\ S_X(f) - \Delta S_X(0) & f \geq 0 \end{cases}$$

Par construction, en notant  $U(f)$  l'échelon de Heaviside, la fonction  $\tilde{S}_X(f) = S_X(f) - \Delta S_X(0)U(f)$  est continue en  $f = 0$ . Alors :

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{-\frac{1}{\sqrt{T}}}^{\frac{1}{\sqrt{T}}} \left| \frac{e^{j2\pi fT} - 1}{j2\pi fT} \right|^2 dS_X(f) \\ &= \Delta S_X(0) + \int_{-\frac{1}{\sqrt{T}}}^{\frac{1}{\sqrt{T}}} \left| \frac{e^{j2\pi fT} - 1}{j2\pi fT} \right|^2 d\tilde{S}_X(f) \end{aligned}$$

Puisque pour  $x > 0$ , on a

$$\begin{aligned} \left| \int_0^x e^{iu} du \right| &\leq \int_0^x |e^{iu}| du = x \\ |e^{ix} - 1| &\leq x, \end{aligned}$$

on en déduit

$$\begin{aligned} I_2 - \Delta S_X(0) &= \int_{-\frac{1}{\sqrt{T}}}^{\frac{1}{\sqrt{T}}} \left| \frac{e^{j2\pi fT} - 1}{j2\pi fT} \right|^2 d\tilde{S}_X(f) \\ &\leq \int_{-\frac{1}{\sqrt{T}}}^{\frac{1}{\sqrt{T}}} d\tilde{S}_X(f) = \tilde{S}_X\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right) - \tilde{S}_X\left(-\frac{1}{\sqrt{T}}\right) \end{aligned}$$

Par continuité de  $\tilde{S}_X(f)$  et par passage à la limite  $T \rightarrow +\infty$ , on en déduit  $I_2 = \Delta S_X(0)$ .

### Utilisation

- **Le secteur**

Puisque  $E[X(t)] = 0$ , il suffit de vérifier que  $\Delta S_X(0) = 0$ , ce qui est immédiat. En effet, puisque  $E[X(t)X(t-\tau)] = \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f_0\tau)$ , la densité spectrale de puissance de  $X(t)$  est

$$s_X(f) = \frac{A^2}{4} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$$

et son intégrale s'écrit

$$S_X(f) = \frac{A^2}{4} [U(f - f_0) + U(f + f_0)],$$

d'où

$$\Delta S_X(0) = 0.$$

**Ceci confirme que le secteur est un signal ergodique au premier ordre.**

- **Le carré du secteur**

La fonction d'autocorrélation du carré du secteur est

$$E[X(t)X(t-\tau)] = \frac{E[A^2]}{4} E\{[1 + \cos(4\pi f_0t + 2\theta)][1 + \cos(4\pi f_0t - 4\pi f_0\tau + 2\theta)]\}$$

$$\begin{aligned} E[X(t)X(t-\tau)] &= \frac{E[A^2]}{4} E\{[1 + \cos(4\pi f_0t + 2\theta)][1 + \cos(4\pi f_0t - 4\pi f_0\tau + 2\theta)]\} \\ &= \frac{E[A^2]}{4} + \frac{E[A^2]}{8} \cos(4\pi f_0\tau), \end{aligned}$$

d'où la densité spectrale de puissance

$$s_X(f) = \frac{E[A^2]}{4} \delta(f) + \frac{E[A^2]}{16} \delta(f - 2f_0) + \frac{E[A^2]}{16} \delta(f + 2f_0)$$

et son intégrale

$$S_X(f) = \frac{E[A^2]}{4} U(f) + \frac{E[A^2]}{16} U(f - 2f_0) + \frac{E[A^2]}{16} U(f + 2f_0).$$

On en déduit

$$\Delta S_X(0) - m^2 = \frac{E[A^2]}{4} - \frac{m_A^2}{4} = \frac{\sigma_A^2}{4}$$

qui est différent de 0 lorsque  $A$  est une variable aléatoire (non constante). **Ceci confirme que le carré du secteur est un signal non ergodique.**

### 1.3.4 Résultats intéressants

- Un signal aléatoire  $x(t)$  est ergodique au premier ordre si et seulement si

$$\frac{1}{T} \int_0^T c_X(\tau) d\tau \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} 0$$

où  $c_X(\tau) = E[X(t)X^*(t - \tau)] - |m|^2$  est l'**autocovariance** de  $X(t)$ .

- **Condition suffisante d'ergodicité au premier ordre** : si  $c_X(\tau) \xrightarrow{\tau \rightarrow +\infty} 0$ , alors  $x(t)$  est ergodique au premier ordre.

Les preuves de ces résultats sont disponibles dans le livre de Papoulis [2] (voir Eq. (12.7) p. 526 et Eq. (12.10) p. 527).

## 1.4 Exercices sur les signaux stationnaires

### 1.4.1 Exponentielle complexe d'amplitude uniforme et de fréquence aléatoire de loi de Laplace

On considère un signal aléatoire  $Z(t)$  défini par

$$Z(t) = A \exp [2j\pi Bt]$$

où  $j^2 = -1$ ,  $A$  est une variable aléatoire uniforme sur  $] - 1, +1[$ ,  $B$  est une variable aléatoire indépendante de  $A$  possédant une loi de Laplace de densité

$$f(b) = \frac{1}{2} \exp(-|b|), b \in \mathbb{R}.$$

On rappelle qu'une variable aléatoire  $A$  uniforme sur  $] - 1, 1[$  vérifie  $E[A] = 0$  et  $E[A^2] = 1/3$ .

1. Montrer que  $Z(t)$  est un signal aléatoire stationnaire.

Le signal  $Z(t)$  est stationnaire si sa moyenne  $E[Z(t)]$  et sa fonction d'autocorrélation  $E[Z(t)Z^*(t - \tau)]$  sont des quantités indépendantes du temps. En utilisant le fait que les variables aléatoires  $A$  et  $B$  sont indépendantes, on obtient

$$E[Z(t)] = E[A]E\{\exp [2j\pi Bt]\} = 0 \text{ (car } E[A] = 0\text{)}.$$

De même

$$\begin{aligned} E[Z(t)Z^*(t - \tau)] &= E[A^2]E\{\exp [2j\pi Bt] \exp [-2j\pi B(t - \tau)]\} \\ &= \frac{1}{3}E[\exp (2j\pi B\tau)] \end{aligned} \quad (5)$$

qui est une quantité indépendante de  $t$ . Le signal  $Z(t)$  est donc stationnaire au second ordre.

2. Déterminer la fonction d'autocorrélation et la densité spectrale de puissance de  $Z(t)$ .  
D'après la question précédente

$$\begin{aligned} E[Z(t)Z^*(t - \tau)] &= \frac{1}{3}E[\exp (2j\pi B\tau)] \\ &= \frac{1}{3} \int_{-\infty}^{\infty} \exp (2j\pi b\tau) p(b) db \\ &= \frac{1}{6} \int_{-\infty}^{\infty} \exp (2j\pi b\tau) \exp (-|b|) db. \end{aligned} \quad (6)$$

On peut calculer cette intégrale de manière directe

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(2j\pi b\tau) \exp(-|b|) db &= \int_{-\infty}^0 \exp(2j\pi b\tau) \exp(b) db + \int_0^{\infty} \exp(2j\pi b\tau) \exp(-b) db \\ &= \frac{1}{2j\pi\tau + 1} + \frac{1}{1 - 2j\pi\tau} = \frac{2}{4\pi^2\tau^2 + 1}. \end{aligned} \quad (7)$$

ce qui permet d'obtenir

$$R_Z(\tau) = \frac{1}{3(1 + 4\pi^2\tau^2)}.$$

Mais on peut aussi remarquer que

$$\begin{aligned} E[Z(t)Z^*(t - \tau)] &= \frac{1}{6} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(2j\pi b\tau) \exp(-|b|) db \\ &= \frac{1}{6} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(2j\pi f\tau) \exp(-|f|) df \\ &= \frac{1}{6} \text{TF}^{-1} [e^{-|f|}] \\ &= \frac{1}{6} \times \frac{2}{1 + 4\pi^2\tau^2} = \frac{1}{3(1 + 4\pi^2\tau^2)}. \end{aligned} \quad (8)$$

La densité spectrale de puissance du signal  $Z(t)$  est

$$s_Z(f) = \text{TF}[R_Z(\tau)] = \frac{1}{6} e^{-|f|}.$$

3. On considère un filtre de transmittance  $H(f) = e^{-3|f|}$  dont l'entrée est le signal  $Z(t)$ . Déterminer la fonction d'autocorrélation du signal de sortie  $W(t) = Z(t) * h(t)$  avec  $h(t) = \text{TF}^{-1}[H(f)]$ .  
D'après la relation de Wiener-Lee

$$\begin{aligned} s_W(f) &= s_Z(f) |H(f)|^2 \\ &= \frac{1}{6} e^{-|f|} \times e^{-6|f|} = \frac{1}{6} e^{-7|f|}. \end{aligned}$$

Donc

$$R_W(\tau) = \text{TF}^{-1} \left[ \frac{1}{6} e^{-7|f|} \right] = \frac{1}{6} \times \frac{1}{7} \times \frac{2 \times 49}{49 + 4\pi^2\tau^2} = \frac{7}{3(49 + 4\pi^2\tau^2)}.$$

#### 1.4.2 Ergodicité de la somme de deux signaux

On considère le signal  $X(t)$  défini par  $X(t) = X_1(t) + AX_2(t)$ , où  $A$  est une variable aléatoire uniforme sur  $\{0, 1\}$  (i.e.,  $P[A = 0] = P[A = 1] = 1/2$ ), et  $X_1(t), X_2(t)$  sont deux signaux aléatoires stationnaires de moyennes  $m_1$  et  $m_2$ , de fonctions d'autocorrélation  $R_1(\tau)$  et  $R_2(\tau)$  et de densités spectrales de puissance  $s_1(f)$  et  $s_2(f)$ . On suppose également que  $A, X_1(t)$  et  $X_2(t)$  sont mutuellement indépendants.

1. Déterminer la moyenne, la fonction d'autocorrélation et la densité spectrale de puissance de  $X(t)$ .

On a

$$E[X(t)] = E[X_1(t) + AX_2(t)] = m_1 + \frac{m_2}{2}.$$

De plus

$$E[X(t)X(t - \tau)] = E\{[X_1(t) + AX_2(t)][X_1(t - \tau) + AX_2(t - \tau)]\}$$

En développant, on obtient

$$R_X(\tau) = R_1(\tau) + \frac{1}{2}R_2(\tau) + m_1m_2.$$

La densité spectrale de puissance de  $X(t)$  s'écrit donc

$$s_X(f) = s_1(f) + \frac{1}{2}s_2(f) + m_1m_2\delta(f).$$

2. En supposant que  $X_1(t)$  et  $X_2(t)$  sont des signaux aléatoires ergodiques au premier ordre, à quelles conditions sur  $m_1$  et  $m_2$  le signal aléatoire  $X(t)$  est-il également ergodique au premier ordre ?

On a

$$S_X(f) = S_1(f) + \frac{1}{2}S_2(f) + m_1m_2U(f).$$

Donc

$$\Delta S_X(0) = S_X(0^+) - S_X(0^-) = \Delta S_1(0) + \frac{1}{2}\Delta S_2(0) + m_1m_2.$$

Le signal  $X(t)$  est ergodique au premier ordre si  $\Delta S_X(0) - (m_1 + \frac{m_2}{2})^2 = 0$ . Comme  $X_1(t)$  et  $X_2(t)$  sont ergodiques au premier ordre, on a  $\Delta S_1(0) = m_1^2$  et  $\Delta S_2(0) = m_2^2$ . Donc

$$\Delta S_X(0) - \left(m_1 + \frac{m_2}{2}\right)^2 = m_1^2 + \frac{1}{2}m_2^2 + m_1m_2 - \left(m_1 + \frac{m_2}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}m_2^2.$$

Le signal aléatoire  $X(t)$  est-il donc ergodique au premier ordre si et seulement si  $m_2 = 0$

### 1.4.3 Exponentielle complexe de fréquence et phase aléatoires

On considère un signal aléatoire  $x(t)$  défini par

$$x(t) = \exp[j(2\pi ft + \phi)]$$

où  $f$  est une variable aléatoire de densité  $p(f)$  et  $\phi$  est une phase constante appartenant à l'intervalle  $]0, 2\pi[$ .

- Exprimer la moyenne du signal  $x(t)$  en fonction de  $\phi$  et de la transformée de Fourier inverse de  $p(f)$ . Le signal  $x(t)$  est-il stationnaire ? Calculer la moyenne de  $x(t)$  dans les deux cas suivants
  - $f$  est uniforme sur l'intervalle  $[f_0 - \Delta f, f_0 + \Delta f]$ , où  $f_0$  et  $\Delta f$  sont des constantes telles que  $f_0 > \Delta f$
  - la densité de probabilité de  $f$  est gaussienne autour de la fréquence  $f_0$ , i.e.,

$$p(f) = \exp[-\pi(f - f_0)^2], \quad f \in \mathbb{R}.$$

- Calculer la fonction d'autocorrélation et la densité spectrale de puissance de  $x(t)$  dans le cas où  $f$  est uniforme sur l'intervalle  $[f_0 - \Delta f, f_0 + \Delta f]$  avec  $f_0 > \Delta f$ .

La moyenne du signal  $x(t)$  est

$$E[x(t)] = E \left[ e^{j\phi} e^{j2\pi ft} \right] = e^{j\phi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi ft} p(f) df$$

d'où

$$E[x(t)] = e^{j\phi} \text{TF}^{-1} [p(f)].$$

En général,  $\text{TF}^{-1} [p(f)]$  dépend de  $t$  (sauf cas exceptionnel  $p(f) = \text{constante} \times \delta(f)$ ) donc  $x(t)$  est un signal aléatoire non-stationnaire.

- Si la fréquence  $f$  est uniforme sur l'intervalle  $[f_0 - \Delta f, f_0 + \Delta f]$ , où  $f_0$  et  $\Delta f$  sont des constantes telles que  $f_0 > \Delta f$ , on a

$$\text{TF}^{-1} [p(f)] = \text{TF}^{-1} \left[ \frac{1}{2\Delta f} \Pi_{2\Delta f}(f - f_0) \right] = \text{sinc}(2\pi\Delta f) e^{j2\pi f_0 t}$$

d'où

$$E[x(t)] = e^{j\phi} \text{sinc}(2\pi\Delta f) e^{j2\pi f_0 t}.$$

- Si  $p(f) = \exp[-\pi(f - f_0)^2]$ ,  $f \in \mathbb{R}$ , alors (en utilisant la TF inverse d'un décalage fréquentiel)

$$\text{TF}^{-1} [p(f)] = e^{j2\pi f_0 t} \text{TF}^{-1} [\exp(-\pi f^2)] = e^{j2\pi f_0 t} e^{-\pi t^2}$$

d'où

$$E[x(t)] = \exp(j\phi + j2\pi f_0 t - \pi t^2).$$

Dans le cas où  $f$  est uniforme sur l'intervalle  $[f_0 - \Delta f, f_0 + \Delta f]$  avec  $f_0 > \Delta f$ , la fonction d'autocorrélation de  $x(t)$  est

$$E[x(t)x^*(t - \tau)] = E \left[ e^{j\phi} e^{j2\pi f t} e^{-j\phi} e^{-j2\pi f(t - \tau)} \right] = E \left[ e^{j2\pi f \tau} \right] = \int_{f_0 - \Delta f}^{f_0 + \Delta f} e^{j2\pi f \tau} \frac{1}{2\Delta f}.$$

Des calculs élémentaires conduisent à

$$R_x(\tau) = E[x(t)x^*(t - \tau)] = e^{j2\pi f_0 \tau} \text{sinc}(2\pi\Delta\tau).$$

La densité spectrale de puissance de  $x(t)$  est donc définie par

$$s_x(f) = \text{TF}[R_x(\tau)] = \delta(f - f_0) * \frac{1}{2\Delta f} \Pi_{2\Delta f}(f) = \frac{1}{2\Delta f} \Pi_{2\Delta f}(f - f_0).$$

Corrections : voir examen ISN du 16 janvier 2020, <http://tourneret.perso.enseeiht.fr/SignalProcessing/>

#### 1.4.4 Exponentielle complexe d'amplitude binaire et de fréquence aléatoire de loi uniforme

On considère un signal aléatoire  $x(t)$  défini par

$$x(t) = A \exp [j2\pi Bt]$$

où  $j^2 = -1$ ,  $A$  est une variable aléatoire uniforme sur  $\{-1, +1\}$ , c'est-à-dire  $P[A = 1] = P[A = -1] = \frac{1}{2}$  et  $B$  est une variable aléatoire indépendante de  $A$  et de loi uniforme sur l'intervalle  $]0, 1[$ . On rappelle qu'une variable aléatoire uniforme sur l'intervalle  $]0, 1[$  possède la densité

$$p(b) = \begin{cases} 1 & \text{si } b \in ]0, 1[ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que  $x(t)$  est un signal stationnaire et déterminer la densité spectrale de puissance et la puissance du signal  $x(t)$ .

Comme les variables aléatoires  $A$  et  $B$  sont indépendantes, la moyenne du signal  $x(t)$  est

$$E[x(t)] = E[A] \times E[\exp(j2\pi Bt)].$$

Mais  $E[A] = 1 \times \frac{1}{2} + (-1) \times \frac{1}{2} = 0$  d'où

$$E[x(t)] = 0.$$

La fonction d'autocorrélation de  $x(t)$  est

$$\begin{aligned} E[x(t)x^*(t-\tau)] &= E[A^2] \times E[\exp(j2\pi B\tau)] \\ &= \int_0^1 \exp(j2\pi b\tau) db \\ &= \frac{e^{j2\pi\tau} - 1}{j2\pi\tau}. \end{aligned}$$

Comme  $E[x(t)]$  et  $E[x(t)x^*(t-\tau)]$  ne dépendent pas de  $t$ , le signal  $x(t)$  est stationnaire (au second ordre). La densité spectrale de  $x(t)$  est  $s_x(f) = \text{TF}[R_x(\tau)]$ , i.e.,

$$s_x(f) = \text{TF} \left[ e^{j\pi\tau} \frac{e^{j\pi\tau} - e^{-j\pi\tau}}{j2\pi\tau} \right] = \text{TF} [e^{j\pi\tau} \text{sinc}\pi\tau] = \Pi_1(f) * \delta \left( f - \frac{1}{2} \right) = \Pi_1 \left( f - \frac{1}{2} \right).$$

La puissance du signal  $x(t)$  est

$$P_x = R_x(0) = 1.$$

#### 1.4.5 Prédiction pour un signal aléatoire stationnaire

Soit  $x(t)$  un signal aléatoire stationnaire réel de fonction d'autocorrélation  $R_x(\tau)$ .

- Exprimer  $E[(x(t) - x(t-\tau))^2]$  en fonction de  $R_x(\tau)$  et de  $R_x(0)$ . Qu'en déduit-on sur la signification de  $R_x(\tau)$  ?

Il suffit de développer le terme à l'intérieur du carré et d'utiliser les propriétés classiques de l'espérance d'un signal aléatoire stationnaire

$$E[(x(t) - x(t-\tau))^2] = E[x^2(t)] + E[x^2(t-\tau)] - 2E[x(t)x(t-\tau)] = 2R_x(0) - 2R_x(\tau).$$

Plus  $R_x(\tau)$  a une grande valeur, plus  $E[(x(t) - x(t-\tau))^2]$  (qui est le carré d'une distance entre  $x(t)$  et  $x(t-\tau)$ ) a une petite valeur. Donc  $R_x(\tau)$  mesure le lien entre  $x(t)$  et  $x(t-\tau)$ .

- L'instant  $\tau$  étant connu, déterminer en fonction de  $R_x(\tau)$  et de  $R_x(0)$  le réel  $a$  (noté  $\hat{a}(\tau)$ ) qui minimise  $g(a) = E[(x(t) - ax(t-\tau))^2]$ . Déterminer  $g[\hat{a}(\tau)]$  en fonction de  $R_x(\tau)$  et de  $R_x(0)$  et justifier, en utilisant une propriété de la fonction d'autocorrélation, le fait que le résultat obtenu est positif. Que représente  $\hat{a}(\tau)x(t-\tau)$  ?

On a

$$g(a) = E[x^2(t)] + a^2 E[x^2(t-\tau)] - 2a E[x(t)x(t-\tau)] = R_x(0) + a^2 R_x(0) - 2a R_x(\tau).$$

qui est maximale pour la valeur de  $a$  annulant sa dérivée

$$g'(a) = 0 \Leftrightarrow 2aR_x(0) - 2R_x(\tau) = 0 \Leftrightarrow a = \frac{R_x(\tau)}{R_x(0)}.$$

On pose alors

$$\hat{a}(\tau) = \frac{R_x(\tau)}{R_x(0)},$$

d'où

$$g[\hat{a}(\tau)] = R_x(0) + \left[ \frac{R_x(\tau)}{R_x(0)} \right]^2 R_x(0) - 2 \left[ \frac{R_x(\tau)}{R_x(0)} \right] R_x(\tau) = R_x(0) - \frac{R_x^2(\tau)}{R_x(0)}$$

Pour montrer que le résultat est positif, il suffit de factoriser par  $R_x(0)$

$$g[\hat{a}(\tau)] = R_x(0) \left[ 1 - \frac{R_x^2(\tau)}{R_x^2(0)} \right]$$

et d'utiliser le fait qu'une fonction d'autocorrélation est maximale en  $\tau = 0$ . Le terme  $\hat{a}(\tau)x(t-\tau)$  représente la meilleure prédiction linéaire de  $x(t)$  à partir de  $x(t-\tau)$ .



## 2 Filtrage linéaire

En première année, vous vous êtes intéressés au filtrage linéaire des signaux déterministes. L'objectif de ce paragraphe est d'étudier le filtrage des signaux aléatoires stationnaires et en particulier de vérifier si les résultats obtenus dans le contexte de signaux déterministes se généralise aux signaux aléatoires.

### 2.1 Rappels

Le filtrage d'un signal déterministe  $x(t)$  par un filtre de réponse impulsionnelle  $h(t)$  est défini par une opération de convolution qui produit un signal  $y(t)$  tel que

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{\mathbb{R}} x(s)h(t-s)ds = \int_{\mathbb{R}} h(s)x(t-s)ds = h(t) * x(t).$$

Pour que le filtre soit réalisable, il faut que la réponse impulsionnelle soit **réelle** (pour éviter qu'une entrée réelle puisse fournir une sortie à valeur complexe), **causale** (i.e.,  $h(t) = 0$  si  $t < 0$  pour que la sortie du filtre à l'instant  $t$  ne dépende que des entrées aux instants inférieurs à  $t$ ), dans  $L^1$  (i.e., telle que  $\int_{\mathbb{R}} |h(u)|du < +\infty$  pour que le filtre soit **stable**, c'est-à-dire que la sortie soit bornée pour toute entrée bornée).

On remarquera que toute opération linéaire n'est pas un filtre (considérer par exemple  $y(t) = m(t)x(t)$  ou  $y(t) = x(0)$ ) et que dans le cas de signaux déterministes, on vérifie qu'une opération est un filtre linéaire en utilisant la propriété

$$y(t) = x(t) * h(t) \Leftrightarrow Y(f) = X(f)H(f)$$

où  $X(f) = \text{TF}[x(t)]$  et  $H(f) = \text{TF}[h(t)]$ . La fonction  $h(t)$  s'appelle **réponse impulsionnelle** (car si  $x(t) = \delta(t)$ , on a  $y(t) = h(t) * \delta(t) = h(t)$ ) tandis que sa transformée de Fourier  $H(f)$  s'appelle **transmittance** ou **fonction de transfert**. Les relations entre les fonctions d'autocorrélation et densités spectrales de  $x(t)$  et de  $y(t)$  s'appellent les relations de Wiener-Lee rappelées ci-dessous

- **Densité spectrale de puissance**

$$s_y(f) = s_x(f)|H(f)|^2$$

- **Intercorrélation**

$$R_{yx}(\tau) = R_x(\tau) * h(\tau)$$

- **Autocorrélation**

$$R_y(\tau) = R_x(\tau) * h(\tau) * h^*(-\tau)$$

### 2.2 Filtrage des signaux aléatoires

Le filtrage des signaux aléatoires stationnaires est défini par une opération de convolution

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{\mathbb{R}} x(s)h(t-s)ds = \int_{\mathbb{R}} h(s)x(t-s)ds = h(t) * x(t).$$

où les intégrales sont définies au sens de la **convergence en moyenne quadratique**.

### 2.3 Identification d'une opération de filtrage linéaire

#### 2.3.1 Définition

Pour identifier une opération de filtrage linéaire, on peut utiliser le fait qu'il existe une **isométrie** entre l'ensemble des signaux aléatoires engendrés par un processus aléatoire stationnaire  $x(t)$  (i.e., l'ensemble des combinaisons linéaires de la forme  $\sum_{k=1}^N a_k x(t_k)$  et des limites des suites de variables aléatoires

ayant cette forme notées  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k_n=1}^{N_n} a_{k_n} x(t_{k_n})$  et l'ensemble des fonctions à valeurs complexes engendrées par  $\exp(j2\pi ft)$  (i.e., l'ensemble des combinaisons linéaires de la forme  $\sum_{k=1}^N a_k \exp(2\pi f t_k)$  et des limites des suites de variables aléatoires ayant cette forme notées  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k_n=1}^{N_n} a_{k_n} \exp(2\pi f t_{k_n})$ ). L'espace des signaux aléatoires engendré par  $x(t)$  est muni du produit scalaire

$$\langle u(t), v(t) \rangle_1 = E[u(t)v^*(t)]$$

tandis que l'espace des fonctions complexes engendré par  $\exp(j2\pi ft)$  est muni du produit scalaire

$$\langle a(t), b(t) \rangle_2 = \int_{\mathbb{R}} a(t)b^*(t)s_x(f)df.$$

Le fait qu'il existe une isométrie entre ces deux espaces découle de l'égalité suivante

$$R_x(\tau) = E[x(t)x^*(t-\tau)] = \langle x(t), x(t-\tau) \rangle_1$$

et du fait que

$$R_x(\tau) = \text{TF}^{-1}(s_x(f)) = \int_{\mathbb{R}} s_x(f) \exp(j2\pi f\tau)df = \langle \exp(j2\pi ft), \exp(j2\pi f(t-\tau)) \rangle_2.$$

Pour plus de détails, on pourra se reporter à l'excellent livre de Yaglom [3]. On notera  $x(t) \leftrightarrow \exp(j2\pi ft)$  le fait que  $x(t)$  admette  $\exp(j2\pi ft)$  comme correspondance par l'isométrie. On en déduit

$$x(t) * h(t) = \int_{\mathbb{R}} h(s)x(t-s)ds \leftrightarrow \int_{\mathbb{R}} h(s) \exp[j2\pi f(t-s)]ds = \exp(j2\pi ft)H(f)$$

qui caractérise l'opération de filtrage linéaire. On en déduit le résultat suivant

Pour vérifier qu'une opération  $y(t) = T[x(t)]$  est une opération de filtrage linéaire, on remplace  $x(t)$  par  $\exp(j2\pi ft)$  dans l'expression de  $y(t)$  et on factorise par  $\exp(j2\pi ft)$ . Si le terme devant  $\exp(j2\pi ft)$  ne dépend que de  $f$  (et pas de  $t$ ), on le note  $H(f)$  et on a une opération de filtrage linéaire avec un filtre de transmittance  $H(f)$ . Si le terme devant  $\exp(j2\pi ft)$  dépend de  $t$ , on n'a pas une opération de filtrage linéaire.

Ce résultat peut également s'expliquer à l'aide de la notion de **réponse harmonique** : si on met un signal de fréquence  $f_0$  à l'entrée d'un filtre, i.e.,  $x(t) = \exp(2\pi f_0 t)$ , la sortie du filtre est également une fréquence pure mais dont l'amplitude est la phase ont été modifiées par le filtre, i.e.,  $y(t) = H(f_0) \exp(2\pi f_0 t)$ .

### 2.3.2 Exemples

- Exemple 1 :  $y(t) = x'(t)$

$$x'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h} \leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\exp(j2\pi f(t+h)) - \exp(j2\pi ft)}{h} = (j2\pi f) \exp(j2\pi ft).$$

Comme  $H(f) = j2\pi f$  est indépendant de  $t$ ,  $y(t) = x'(t)$  est la sortie d'un filtre linéaire de transmittance  $H(f) = j2\pi f$  (appelé filtre dérivateur)

- Exemple 2 :  $y(t) = \sum_{k=1}^K a_k x(t - t_k)$

$$y(t) \leftrightarrow \sum_{k=1}^K a_k \exp(j2\pi f(t - t_k)) = \exp(j2\pi ft) \sum_{k=1}^K a_k \exp(j2\pi f t_k)$$

Comme  $H(f) = \sum_{k=1}^K a_k \exp(j2\pi f t_k)$  est indépendant de  $t$ , on a une opération de filtrage linéaire avec un filtre de transmittance  $H(f)$  (appelé filtre multi-trajets)

- Exemple 3 :  $y(t) = x(t)m(t)$  avec  $m(t)$  indépendant de  $x(t)$

$$x(t)m(t) \leftrightarrow \exp(j2\pi ft)m(t).$$

La correspondance de  $x(t)m(t)$  ne peut pas s'écrire  $\exp(j2\pi ft)H(f)$  car  $m(t)$  est une fonction de  $t$  (et pas de  $f$ ) donc l'opération qui à  $x(t)$  associe  $x(t)m(t)$  n'est pas une opération de filtrage linéaire.

## 2.4 Relations de Wiener-Lee

Les relations de Wiener-Lee sont valables pour des signaux aléatoires stationnaires, comme le montre cette partie.

- **Intercorrélation**

$$R_{yx}(\tau) = R_x(\tau) * h(\tau)$$

Pour démontrer cette relation, il suffit d'exprimer le produit scalaire à l'aide de l'isométrie

$$\begin{aligned} R_{yx}(\tau) &= E[y(t)x^*(t-\tau)] \\ &= \langle y(t), x(t-\tau) \rangle_1 \\ &= \langle \exp(j2\pi ft)H(f), \exp(j2\pi f(t-\tau)) \rangle_2 \\ &= \int_{\mathbb{R}} \exp(j2\pi ft)H(f) \exp(-j2\pi f(t-\tau))s_x(f)df \\ &= \int_{\mathbb{R}} H(f) \exp(j2\pi f\tau)s_x(f)df \\ &= \text{TF}^{-1}[H(f)s_x(f)] \\ &= R_x(\tau) * h(\tau). \end{aligned} \tag{9}$$

- **Autocorrélation**

$$R_y(\tau) = R_x(\tau) * h(\tau) * h^*(-\tau)$$

On procède comme ci-dessus

$$\begin{aligned} R_y(\tau) &= E[y(t)y^*(t-\tau)] \\ &= \langle y(t), y(t-\tau) \rangle_1 \\ &= \langle \exp(j2\pi ft)H(f), \exp(j2\pi f(t-\tau))H(f) \rangle_2 \\ &= \int_{\mathbb{R}} \exp(j2\pi ft)H(f) \exp(-j2\pi f(t-\tau))H^*(f)s_x(f)df \\ &= \int_{\mathbb{R}} H(f)H^*(f) \exp(j2\pi f\tau)s_x(f)df \\ &= \text{TF}^{-1}[|H(f)|^2s_x(f)] \\ &= R_x(\tau) * h(\tau) * h^*(-\tau). \end{aligned} \tag{10}$$

- **Densité spectrale de puissance**

$$s_y(f) = s_x(f)|H(f)|^2$$

Comme  $s_y(f) = \text{TF}[R_y(\tau)]$ , le résultat découle de l'avant dernière ligne de l'équation précédente.

- **Moyenne**

La moyenne de la sortie d'un filtre vérifie la relation suivante

$$E[y(t)] = H(0)E[x(t)]$$

En effet

$$\begin{aligned}
 E[y(t)] &= E[x(t) * h(t)] \\
 &= E \left[ \int_{\mathbb{R}} h(s)x(t-s)ds \right] \\
 &= \int_{\mathbb{R}} h(s)E[x(t-s)]ds \\
 &= E[x(t-s)] \int_{\mathbb{R}} h(s)ds \\
 &= E[x(t)]H(0)
 \end{aligned} \tag{11}$$

où on a utilisé l'égalité  $E[x(t-s)] = E[x(t)]$  qui découle de la stationnarité du signal  $x(t)$ .

- **Formule des interférences**

Cette formule exprime l'intercorrélation entre les sorties de deux filtres de transmittances  $H_1(f)$  et  $H_2(f)$  de même entrée  $x(t)$ . Ces deux sorties sont donc définies par  $y_1(t) = x(t) * h_1(t)$  et  $y_2(t) = x(t) * h_2(t)$  et on a

$$E[y_1(t)y_2^*(t-\tau)] = \int_{\mathbb{R}} H_1(f)H_2^*(f) \exp(j2\pi f\tau)s_x(f)df.$$

La preuve est similaire à celle utilisée pour déterminer l'autocorrélation de la sortie d'un filtre

$$\begin{aligned}
 R_{y_1 y_2}(\tau) &= E[y_1(t)y_2^*(t-\tau)] \\
 &= \langle y_1(t), y_2(t-\tau) \rangle_1 \\
 &= \langle \exp(j2\pi ft)H_1(f), \exp(j2\pi f(t-\tau))H_2(f) \rangle_2 \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \exp(j2\pi ft)H_1(f) \exp(-j2\pi f(t-\tau))H_2^*(f)s_x(f)df \\
 &= \int_{\mathbb{R}} H_1(f)H_2^*(f) \exp(j2\pi f\tau)s_x(f)df.
 \end{aligned} \tag{12}$$

Cette relation montre par exemple que si les deux canaux  $H_1(f)$  et  $H_2(f)$  ont de supports disjoints (ce qui implique  $H_1(f)H_2(f) = 0$ , on a  $E[y_1(t)y_2^*(t-\tau)] = 0$ , ce qui signifie que les signaux  $y_1(t)$  et  $y_2(t-\tau)$  sont décorrélés, ce qui n'est pas très intuitif car l'entrée des deux filtres est la même !!

## 2.5 Filtrage adapté

### 2.5.1 Définition

L'objectif du filtre adapté (matched filter en Anglais) est de **débruiter un signal déterministe connu noyé dans un bruit additif**. On suppose donc qu'on observe le signal  $x(t)$  défini par

$$x(t) = s(t) + n(t), \quad t \in [0, T]$$

où  $s(t)$  est un signal déterministe à énergie finie connu et  $n(t)$  est un signal aléatoire stationnaire de moyenne nulle et de densité spectrale de puissance  $s_n(f)$ . On cherche à débruiter le signal  $x(t)$  à l'aide d'un filtre de réponse impulsionnelle  $h(t)$  et de transmittance  $H(f)$ . La sortie de ce filtre est définie par

$$y(t) = y_s(t) + y_n(t) = s(t) * h(t) + n(t) * h(t).$$

**Le filtre adapté (au signal  $s(t)$  connu) est obtenu en maximisant le rapport signal sur bruit**

$$\text{SNR}(t_0) = \frac{y_s^2(t_0)}{E[y_n^2(t_0)]}$$

qui est le rapport des puissances du signal  $y_s$  et du signal  $y_n$  à l'instant de décision  $t_0$  (le choix de  $t_0$  sera discuté plus tard).

### 2.5.2 Expression du filtre

Des calculs élémentaires permettent d'obtenir l'expression suivante du rapport signal sur bruit

$$\text{SNR}(t_0) = \frac{y_s^2(t_0)}{E[y_n^2(t_0)]} = \frac{|\int_{\mathbb{R}} H(f)S(f)e^{j2\pi ft_0} df|^2}{\int_{\mathbb{R}} |H(f)|^2 s_n(f) df}$$

En effet

- **Numérateur**

$$y_s(t) = \text{TF}^{-1} [S(f)H(f)] = \int_{\mathbb{R}} H(f)S(f)e^{j2\pi ft} df$$

- **Dénominateur**

$$P_{y_n} = E[y_n^2(t_0)] = R_{y_n}(0) = \int_{\mathbb{R}} s_n(f) |H(f)|^2 df$$

En introduisant les notations  $a(f) = \sqrt{s_n(f)}H(f)$  et  $b(f) = \frac{S^*(f)}{\sqrt{s_n(f)}}e^{-j2\pi ft_0}$ , on obtient

$$\text{SNR}(t_0) = \frac{|\int_{\mathbb{R}} a(f)b^*(f) df|^2}{\int_{\mathbb{R}} a(f)a^*(f) df}$$

et donc en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on obtient

$$\text{SNR}(t_0) \leq \int_{\mathbb{R}} b(f)b^*(f) df$$

avec égalité lorsque

$$a(f) = kb(f) \Leftrightarrow H(f) = k \frac{S^*(f)}{s_n(f)} e^{-j2\pi ft_0}.$$

Dans le cas particulier d'un **bruit blanc**, on obtient

$$H(f) = KS^*(f)e^{-j2\pi ft_0} \Leftrightarrow h(t) = Ks^*(t_0 - t)$$

ce qui correspond à une **symétrie par rapport à l'axe oy de  $s(t)$  suivi d'une translation de  $t_0$** .

### 2.5.3 SNR maximum

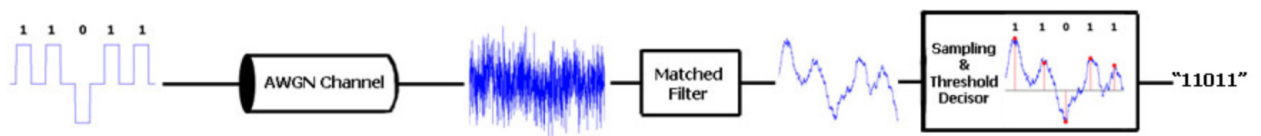
Le rapport signal sur bruit maximum est défini par

$$\text{SNR}(t_0)^{\max} = \int_{\mathbb{R}} b(f)b^*(f) df = \int_{\mathbb{R}} \frac{2}{N_0} |S(f)|^2 df = \frac{2E}{N_0}$$

où  $E$  est l'énergie du signal. On voit donc que le le rapport signal à bruit maximal ne dépend pas de la forme du signal mais uniquement de son **énergie**.

### 2.5.4 Applications

Le filtre adapté est utilisé dans tout récepteur d'un système de communication numérique. Dans cette application, on connaît les signaux  $s_0(t)$  et  $s_1(t)$  qui sont utilisés pour la mise en forme des bits "0" et "1". Lorsqu'on a  $s_1(t) = -s_0(t)$  (ce qui est le cas par exemple pour la mise en forme du signal biphasé), le filtre adapté à  $s_0(t)$  est aussi adapté à  $s_1(t)$ . Cette application est illustrée sur la figure ci-dessous issue de la page wikipedia sur le filtre adapté (matched filter en Anglais)



### 2.5.5 Référence

Pour plus de détails concernant le filtre adapté, le lecteur pourra consulter [4].

## 2.6 Filtrage de Wiener

### 2.6.1 Définition

Le filtre de Wiener est un filtre qui permet de débruiter un signal aléatoire stationnaire de densité spectrale de puissance connue noyé dans un bruit additif supposé également stationnaire. On considère donc deux processus aléatoires stationnaires  $I(t)$  et  $B(t)$  de moyennes nulles (ce qui simplifie un peu l'analyse)  $E[B(t)] = E[I(t)] = 0$ , de fonctions d'autocorrélation  $R_I(\tau)$ ,  $R_B(\tau)$  et de densités spectrales de puissance  $s_I(f)$  et  $s_B(f)$ . On suppose qu'on peut observer

$$X(t) = I(t) + B(t), \quad t \in \Delta \subset \mathbb{R}$$

et on cherche la **meilleure estimation** de  $I(t)$  notée  $\hat{I}(t)$  obtenue par filtrage linéaire de  $X(t)$ .

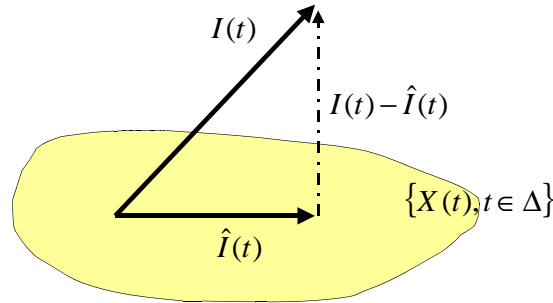
### 2.6.2 Expression du filtre

D'après le principe de la projection orthogonale illustré sur la figure ci-dessous, la solution de ce problème vérifie les **équations normales** définies par

$$E \left\{ \left[ I(t) - \hat{I}(t) \right] X^*(u) \right\} = 0 \quad \forall u$$

ou

$$E [I(t)I^*(u)] = E [\hat{I}(t)X^*(u)] \quad \forall u \quad (13)$$



En remarquant que  $E [I(t)I^*(u)] = R_I(t - u)$  et que  $\hat{I}(t) = X(t) * h(t) = \int X(v)h(t - v)dv$ , où  $h(t)$  est la réponse impulsionnelle recherchée, on obtient

$$E [\hat{I}(t)X^*(u)] = \int h(t - v)R_X(v - u)dv = \int h(x)R_X(t - u - x)dx.$$

Les équations normales (13) permettent alors d'obtenir

$$R_I(y) = \int h(x)R_X(y - x)dx = h(y) * R_X(y) \quad \forall y.$$

On en déduit l'expression de la transmittance du filtre recherché  $H(f)$  en fonction des densités spectrales de puissance de  $I(t)$  et de  $B(t)$

$$H(f) = \frac{s_I(f)}{s_X(f)} = \frac{s_I(f)}{s_I(f) + s_B(f)}$$

### 2.6.3 Expression du filtre

L'erreur d'estimation entre  $I(t)$  et  $\hat{I}(t)$  possède une expression très simple qui est définie par

$$\sigma^2 = E \left[ |I(t) - \hat{I}(t)|^2 \right] = \int \frac{s_I(f)s_B(f)}{s_I(f) + s_B(f)} df$$

En effet

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= E \left[ |I(t) - \hat{I}(t)|^2 \right] \\ &= E \left\{ \left[ I(t) - \hat{I}(t) \right] I^*(t) \right\} \quad (\text{car } I(t) - \hat{I}(t) \text{ est orthogonal à } \hat{I}(t)) \\ &= R_I(0) - E \left[ \hat{I}(t) I^*(t) \right] \end{aligned}$$

Le second terme de cette égalité peut se calculer simplement comme suit, en utilisant  $\hat{I}(t) = X(t) * h(t) = \int X(u)h(t-u)dv$  et  $X(u) = I(u) + B(u)$

$$\begin{aligned} E \left[ \hat{I}(t) I^*(t) \right] &= \int h(t-u) E \left[ I(u) I^*(t) \right] du + \int h(t-u) E \left[ B(u) I^*(t) \right] \\ &= \int h(x) R_I^*(x) dx \end{aligned}$$

d'où

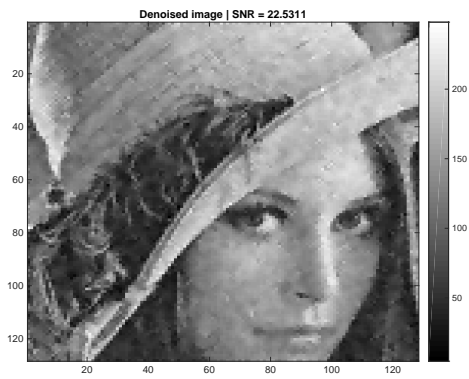
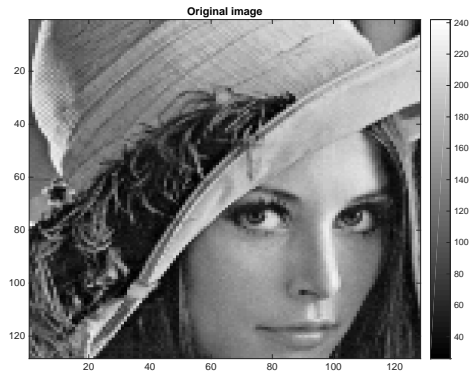
$$\sigma^2 = \int s_I(f) df - \int H(f) s_I(f) df = \int \frac{s_I(f)s_B(f)}{s_I(f) + s_B(f)} df$$

On peut faire les remarques suivantes

- l'erreur est nulle lorsqu'il n'y a pas de bruit (i.e., lorsque  $s_b(f) = 0$ )
- l'erreur est nulle lorsque les DSP du signal et du bruit ont des supports disjoints (ce qui implique  $s_I(f)s_B(f) = 0$ )

### 2.6.4 Applications

Une application classique du filtre de Wiener est le débruitage d'images. Quelques résultats obtenus avec cette méthode sont présentés dans les images ci-dessous. Pour plus de détails concernant le filtre de Wiener, le lecteur pourra consulter [5].





## 2.7 Exercices sur le filtrage de signaux aléatoires

### 2.7.1 Filtre adapté

On considère le signal  $X(t)$  défini par

$$X(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0, 1[ \\ 2 - t & \text{si } t \in [1, 2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Le signal  $X(t)$  est-il à énergie finie, à puissance finie ou aléatoire ? Déterminer la fonction d'autocorrélation de  $X(t)$  en  $\tau = 0$ .

Puisque le signal  $X(t)$  est défini sur un intervalle borné  $[0, 2]$ , il est à énergie finie. La fonction d'autocorrélation de  $X(t)$  en  $\tau = 0$  est son énergie définie par

$$\begin{aligned} E &= \int_{\mathbb{R}} X^2(t) dt \\ &= \int_0^1 1 dt + \int_1^2 (2-t)^2 dt \\ &= 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}. \end{aligned} \tag{14}$$

2. Représenter graphiquement la réponse impulsionnelle du filtre adapté au signal  $X(t)$  lorsque l'instant de décision est  $t_0 = 2$ .

D'après le cours, le filtre adapté à  $X(t)$  s'obtient par une symétrie par rapport à l'axe des  $y$  et une translation de  $t_0 = 2$ . Il est donc défini par

$$h(t) = \begin{cases} t & \text{si } t \in [0, 1[ \\ 1 & \text{si } t \in [1, 2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

3. Déterminer le rapport signal sur bruit en sortie du filtre adapté dans le cas d'un bruit blanc additif stationnaire de densité spectrale de puissance  $s_n(f) = 1$ .

Dans le cas d'un bruit blanc, le rapport signal sur bruit en sortie du filtre adapté est le rapport entre l'énergie  $E$  du signal  $X(t)$  et la densité spectrale du bruit  $s_n(f) = N_0/2 = 1$ , soit

$$\text{SNR} = \frac{2E}{N_0} = \frac{4}{3}.$$

### 2.7.2 Dérivées d'un signal aléatoire

On considère un signal aléatoire stationnaire  $X(t)$  de moyenne nulle, de fonction d'autocorrélation  $R(\tau)$  et de densité spectrale de puissance  $s(f)$ . On construit le signal  $Z(t)$  défini par

$$Z(t) = X'(t) - X''(t)$$

où  $X'(t)$  et  $X''(t)$  sont les dérivées première et seconde du processus aléatoire  $X(t)$ .

1. Montrer que  $Z(t)$  est le résultat d'un filtrage linéaire de  $X(t)$  par un filtre dont on déterminera la transmittance.

Pour montrer qu'on a une opération de filtrage linéaire, il suffit de déterminer la réponse à  $X(t) = \exp(j2\pi ft)$  et de vérifier qu'elle s'écrit  $\exp(j2\pi ft)H(f)$ , où  $H(f)$  est une quantité indépendante

de  $t$  qui est la transmittance du filtre (voir cours pour justification). Dans l'exemple de cet exercice, la réponse à  $X(t) = \exp(j2\pi ft)$  est

$$(j2\pi f) \exp(j2\pi ft) - (j2\pi f)^2 \exp(j2\pi ft) = \exp(j2\pi ft)H(f)$$

avec

$$H(f) = j2\pi f + 4\pi^2 f^2.$$

2. Déterminer la densité spectrale de puissance de  $Z(t)$  en fonction de celle de  $X(t)$ .  
D'après la relation de Wiener-Lee, on a

$$s_Z(f) = s(f)|H(f)|^2 = s(f)(4\pi^2 f^2)(1 + 4\pi^2 f^2).$$

### 2.7.3 Filtrage par intégration

On considère un signal aléatoire stationnaire  $X(t)$  de moyenne nulle et de fonction d'autocorrélation  $R_X(\tau) = \Lambda_1(\tau)$  avec

$$\Lambda_1(\tau) = \begin{cases} 1 - \tau & \text{si } 0 \leq \tau \leq 1 \\ 1 + \tau & \text{si } -1 \leq \tau \leq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

et on forme le signal aléatoire

$$Y(t) = \int_{t-2}^t X(u) du$$

- Montrer que  $Y(t)$  est obtenu par filtrage linéaire de  $X(t)$  avec un filtre dont on déterminera la fonction de transfert et la réponse impulsionnelle.

Pour montrer qu'on a une opération de filtrage linéaire, il suffit de déterminer la réponse à  $X(t) = \exp(j2\pi ft)$  et de vérifier qu'elle s'écrit  $\exp(j2\pi ft)H(f)$ , où  $H(f)$  est une quantité indépendante de  $t$  qui est la transmittance du filtre (voir cours pour justification). Dans l'exemple de cet exercice, la réponse à  $X(t) = \exp(j2\pi ft)$  est

$$Y(t) = \int_{t-2}^t \exp(j2\pi fu) du = \frac{\exp(j2\pi ft)}{j2\pi f} (1 - \exp(-j4\pi f)) = \exp(j2\pi ft)H(f)$$

avec

$$H(f) = \frac{1 - \exp(-j4\pi f)}{j2\pi f}.$$

Donc  $Y(t)$  est obtenu par filtrage de  $X(t)$  avec un filtre de transmittance  $H(f)$  définie ci-dessus. La réponse impulsionnelle de ce filtre est  $h(t) = \text{TF}^{-1}[H(f)]$ . Pour déterminer cette transformée de Fourier inverse, on peut décomposer  $H(f)$  comme suit

$$H(f) = \exp(-j2\pi f) \frac{\exp(j2\pi f) - \exp(-j2\pi f)}{j2\pi f} = \exp(-j2\pi f) \times 2\text{sinc}(2\pi f),$$

d'où

$$h(t) = \delta(t-1) * \Pi_2(t) = \Pi_2(t-1).$$

- Montrer que la densité spectrale de puissance de  $X(t)$  s'écrit

$$s_Y(f) = \frac{[1 - \cos(2\pi f)][1 - \cos(4\pi f)]}{4\pi^4 f^4}$$

On rappelle la relation  $\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$ .

D'après la relation de Wiener-Lee, on a

$$\begin{aligned} s_y(f) &= s_x(f) |H(f)|^2 \\ &= \text{TF}[\Lambda_1(\tau)] \frac{\sin^2(2\pi f)}{\pi^2 f^2} \\ &= \text{sinc}^2(\pi f) \frac{\sin^2(2\pi f)}{\pi^2 f^2} \\ &= \frac{1 - \cos(2\pi f)}{2\pi^2 f^2} \times \frac{1 - \cos(4\pi f)}{2\pi^2 f^2} \\ &= \frac{[1 - \cos(2\pi f)][1 - \cos(4\pi f)]}{4\pi^4 f^4} \quad \text{CQFD} \end{aligned}$$

#### 2.7.4 Annulation d'échos

Un système "réverbérant" d'entrée  $x(t)$  et de sortie  $y(t)$  est défini par

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k x(t - kT).$$

On supposera dans cet exercice que  $x(t)$  est un signal aléatoire stationnaire et que  $h_0 = 1$ ,  $h_1 = -a$  (avec  $a \in ]0, 1[$ ) et  $h_k = 0, \forall k \geq 2$ .

1. Montrer que  $y(t)$  peut être obtenu par filtrage linéaire de  $x(t)$  et déterminer la réponse impulsionnelle  $h(t)$  et la transmittance  $H(f)$  de ce filtre.

Pour montrer qu'on a une opération de filtrage linéaire, il suffit de déterminer la réponse à  $X(t) = \exp(j2\pi ft)$  et de vérifier qu'elle s'écrit  $\exp(j2\pi ft)H(f)$ , où  $H(f)$  est une quantité indépendante de  $t$  qui est la transmittance du filtre (voir cours pour justification). Dans l'exemple de cet exercice, la réponse à  $X(t) = \exp(j2\pi ft)$  est

$$\sum_{k=0}^{\infty} h_k \exp[j2\pi f(t - kT)] = \exp(j2\pi ft) \sum_{k=0}^{\infty} h_k \exp(-j2\pi fkT) = \exp(j2\pi ft)H(f)$$

avec

$$H(f) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k \exp(-j2\pi fkT).$$

En injectant les valeurs de  $h_k$  dans cette expression, on obtient

$$H(f) = 1 - a \exp(-j2\pi fT).$$

La réponse impulsionnelle de ce filtre est

$$h(t) = \text{TF}^{-1}[1 - a \exp(-j2\pi fT)] = \delta(t) - a\delta(t - T).$$

2. On peut considérer que  $y(t)$  est une superposition d'échos du signal  $x(t)$ . Afin d'annuler ces échos, on peut filtrer le signal  $y(t)$  par un filtre inverse de transmittance  $G(f) = \frac{1}{H(f)}$ . Déterminer la réponse impulsionnelle de ce filtre inverse notée  $g(t)$  et montrer qu'elle s'écrit

$$g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k \delta(t - kT)$$

avec des coefficients  $g_k$  à déterminer.

*Remarque :* On pourra utiliser le fait que pour tout nombre complexe  $z$  tel que  $|z| < 1$ , on a  $\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$ .

L'inverse de  $H(f)$  est

$$G(f) = \frac{1}{H(f)} = \frac{1}{1 - a \exp(-j2\pi fT)}.$$

Comme  $|a \exp(-j2\pi fT)| = |a| < 1$ , on a

$$G(f) = \sum_{k=0}^{+\infty} a^k \exp(-j2\pi f kT),$$

d'où

$$g(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} a^k \text{TF}^{-1} [\exp(-j2\pi f kT)] = \sum_{k=0}^{+\infty} a^k \delta(t - kT).$$

On en déduit

$$g_k = a^k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

3. On approche le filtre inverse précédent par un filtre à réponse impulsionnelle finie.

$$g_K(t) = \sum_{k=0}^{K-1} g_k \delta(t - kT)$$

et on note  $z(t) = y(t) * g_K(t)$  la sortie de l'annulateur d'échos. Déterminer la densité spectrale de puissance de  $z(t)$  en fonction de celle de  $x(t)$  notée  $s_x(f)$  et des paramètres  $a$ ,  $K$  et  $T$ .

D'après la relation de Wiener Lee

$$s_z(f) = s_y(f) |G_K(f)|^2$$

avec

$$G_K(f) = \text{TF}[g_K(t)] = \sum_{k=0}^{K-1} a^k \exp(-j2\pi f kT) = \frac{1 - a^K \exp(-j2\pi f KT)}{1 - a \exp(-j2\pi f T)}.$$

Donc

$$s_z(f) = s_y(f) \frac{|1 - a^K \exp(-j2\pi f KT)|^2}{|1 - a \exp(-j2\pi f T)|^2}.$$

En utilisant la relation

$$s_y(f) = s_x(f) |H(f)|^2 = s_x(f) |1 - a \exp(-j2\pi f T)|^2.$$

on obtient

$$s_z(f) = s_x(f) |1 - a \exp(-j2\pi f KT)|^2,$$

soit après développement

$$s_z(f) = s_x(f) [1 + a^{2K} - 2a^K \cos(2K\pi fT)].$$

On remarquera que

$$\lim_{K \rightarrow \infty} s_z(f) = s_x(f).$$

## 2.7.5 Sinus bruité

On considère un filtre (linéaire invariant dans le temps) passe bas de transmittance  $H(f) = \Pi_{2B}(f)$  défini par

$$H(f) = \begin{cases} 1 & \text{si } f \in ]-B, B[ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

avec  $B > 0$ . On applique à l'entrée de ce filtre un signal aléatoire  $x(t)$  constitué de la somme d'un signal sinusoïdal aléatoire  $a(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \phi)$ , où  $A > 0$  et  $f_0 > 0$  sont deux constantes et  $\phi$  une phase aléatoire uniforme sur l'intervalle  $]0, 2\pi[$  et d'un bruit blanc stationnaire  $b(t)$  passe bande de densité spectrale de puissance

$$s_b(f) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta} & \text{si } f \in ]-f_0 - \Delta, -f_0 + \Delta[ \\ \frac{1}{\Delta} & \text{si } f \in ]f_0 - \Delta, f_0 + \Delta[ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

avec  $\Delta \in ]0, f_0[$  et  $f_0 < B < f_0 + \Delta$ . On a donc en sortie de ce filtre un signal noté  $z(t)$  défini par

$$z(t) = a(t) * h(t) + b(t) * h(t).$$

avec  $h(t) = \text{TF}^{-1} [H(f)]$ .

- Déterminer le rapport signal sur bruit à l'entrée du filtre défini par  $\gamma_e = \frac{P_a}{P_b}$ , où  $P_a$  et  $P_b$  sont les puissances des signaux  $a(t)$  et  $b(t)$ .

La puissance du signal aléatoire  $a(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \phi)$  est  $P_a = R_a(0) = \int s_a(f) df$ , où  $R_a(\tau)$  et  $s_a(f)$  sont la fonction d'autocorrélation et la densité spectrale de puissance de  $a(t)$ . On a vu en cours

$$R_a(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f_0 \tau), \text{ et } s_a(f) = \frac{A^2}{4} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)].$$

Donc

$$P_a = \frac{A^2}{2}.$$

La puissance du bruit est

$$P_b = \int s_b(f) df = \int_{-f_0 - \Delta}^{-f_0 + \Delta} \frac{1}{\Delta} df + \int_{f_0 - \Delta}^{f_0 + \Delta} \frac{1}{\Delta} df = 4.$$

Le rapport signal sur bruit à l'entrée du filtre est donc

$$\gamma_e = \frac{P_a}{P_b} = \frac{A^2}{8}.$$

- Déterminer les puissances  $P_{z_a}$  et  $P_{z_b}$  des signaux filtrés

$$z_a(t) = a(t) * h(t) \quad \text{et} \quad z_b(t) = b(t) * h(t).$$

La densité spectrale de puissance du signal aléatoire  $z_a(t)$  peut s'obtenir à l'aide de la relation de Wiener-Lee

$$s_{z_a}(f) = s_a(f) |H(f)|^2 = s_a(f)$$

car  $f_0$  est dans la bande du filtre. Donc la puissance du signal  $z_a(t)$  est

$$P_{z_a} = P_a.$$

La densité spectrale de puissance du signal aléatoire  $z_b(t)$  est

$$s_{z_b}(f) = s_b(f)|H(f)|^2.$$

Donc la puissance de  $z_b(t)$  est

$$P_{z_b} = \int s_{z_b}(f)df = \int_{-B}^B s_b(f)df = \int_{-B}^{-f_0+\Delta} \frac{1}{\Delta}df \int_{f_0-\Delta}^B \frac{1}{\Delta}df = \frac{2(B-f_0+\Delta)}{\Delta}.$$

- Montrer que le rapport signal sur bruit en sortie du filtre défini par  $\gamma_s = \frac{P_{z_a}}{P_{z_b}}$  est supérieur à  $\gamma_e$ .  
Le rapport signal sur bruit en sortie du filtre est défini par

$$\gamma_s = \frac{P_{z_a}}{P_{z_b}} = \frac{\frac{A^2}{2}}{\frac{A^2}{8}} > \frac{A^2}{8} = \gamma_e.$$

On a donc amélioré le rapport signal sur bruit à l'aide du filtre.

### 2.7.6 Système à deux trajets

On considère un signal aléatoire  $x(t)$  stationnaire de moyenne nulle et de densité spectrale de puissance  $s_x(f)$  définie par

$$s_x(f) = \pi_F(f) = \begin{cases} 1 & \text{si } f \in ]-\frac{F}{2}, \frac{F}{2}[ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et on construit le signal  $y(t) = x(t) + ax(t - t_0)$ , où  $a$  et  $t_0$  sont deux constantes positives.

1. Montrer que  $y(t)$  peut être obtenu par filtrage du signal  $x(t)$  par un filtre dont déterminera la transmittance.

Pour montrer qu'on a une opération de filtrage linéaire, il suffit de déterminer la réponse à  $X(t) = \exp(j2\pi ft)$  et de vérifier qu'elle s'écrit  $\exp(j2\pi ft)H(f)$ , où  $H(f)$  est une quantité indépendante de  $t$  qui est la transmittance du filtre (voir cours pour justification). Dans l'exemple de cet exercice, la réponse à  $X(t) = \exp(j2\pi ft)$  est

$$\exp(j2\pi ft) + a \exp(j2\pi f(t - t_0)) = \exp(j2\pi ft)H(f)$$

avec

$$H(f) = 1 + a \exp(-j2\pi ft_0).$$

Donc  $y(t)$  est obtenu par filtrage de  $x(t)$  avec un filtre de transmittance  $H(f) = 1 + a \exp(-j2\pi ft_0)$ .

2. Déterminer la densité spectrale de puissance de  $y(t)$ .  
D'après la relation de Wiener-Lee

$$s_y(f) = s_x(f)|1 + a \exp(-j2\pi ft_0)|^2 = s_x(f)[1 + a \cos(j2\pi ft_0)] - aj \sin(2\pi ft_0)]^2.$$

D'où

$$s_y(f) = \begin{cases} 1 + a^2 + 2a \cos(2\pi ft_0) & \text{si } -\frac{F}{2} \leq f \leq \frac{F}{2} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

3. Quelle est la puissance du signal  $y(t)$  ?

La puissance de  $y(t)$  peut s'obtenir par intégration de  $s_y(f)$

$$P_y = \int_{-\frac{F}{2}}^{\frac{F}{2}} s_y(f)df = (1 + a^2)F + 2aF \text{sinc}(\pi Ft_0).$$

### 2.7.7 Formule de Benett

#### Exercice difficile.

1. On considère une suite de variables aléatoires binaires  $a_k$  telles que  $P[a_k = 0] = p$  et  $P[a_k = 1] = 1 - p$  avec  $0 < p < 1$ . Déterminer la moyenne et la variance de  $a_k$ .

La moyenne de  $a_k$  est

$$E[a_k] = 0 \times p + 1 \times (1 - p) = 1 - p.$$

De même

$$E[a_k^2] = 0^2 \times p + 1^2 \times (1 - p) = 1 - p.$$

La variance de  $a_k$  est donc

$$\text{var}(a_k) = E[a_k^2] - E^2[a_k] = p(1 - p).$$

2. On forme le signal

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta(t - kT)$$

que l'on filtre à l'aide d'un filtre  $F_h$  de réponse impulsionnelle  $h(t)$ , où  $h(t)$  est une fonction déterministe à énergie finie de support l'intervalle  $[-T/2, T/2]$  avec  $T > 0$  (i.e.,  $h(t) = 0$  si  $t \notin [-T/2, T/2]$ ). Déterminer l'expression de la sortie du filtre  $y(t) = F_h[x(t)]$  en fonction de  $h$  et des variables aléatoires  $a_k$ . Représenter une réalisation de  $y(t)$  dans le cas où

$$h(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < t < T/2 \\ -1 & \text{si } -T/2 < t < 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La sortie du filtre est

$$y(t) = F_h[x(t)] = h(t) * x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k h(t - kT).$$

3. Montrer que la fonction  $h$  définie ci-dessus est à énergie finie et déterminer sa densité spectrale de puissance  $s_h(f)$ . On notera  $r_h(\tau)$  sa fonction d'autocorrélation qu'on ne demande pas de déterminer pour cet exemple.

On a

$$\int h^2(t) dt = T$$

donc  $h$  est bien d'énergie finie. On en déduit

$$s_h(f) = [H(f)]^2 = .$$

$$\begin{aligned} s_h(f) &= \left| \text{TF} \left[ \Pi_{T/2} \left( t - \frac{T}{4} \right) - \Pi_{T/2} \left( t + \frac{T}{4} \right) \right] \right|^2 \\ &= \left| e^{-j\pi f \frac{T}{2}} \times \frac{T}{2} \text{sinc} \left( \pi \frac{T}{2} f \right) - e^{-\pi f \frac{T}{2}} \times \frac{T}{2} \text{sinc} \left( \pi \frac{T}{2} f \right) \right|^2 \\ &= T^2 \text{sinc}^2 \left( \pi \frac{T}{2} f \right) \sin^2 \left( \pi \frac{T}{2} f \right). \end{aligned}$$

4. Déterminer la moyenne du signal  $y(t)$ . Le signal  $y(t)$  est-il stationnaire ?

La moyenne du signal  $y(t)$  est

$$E[y(t)] = (1-p) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(t-kT).$$

Comme  $E[y(t)]$  dépend de  $t$ , le signal  $y(t)$  est non stationnaire.

5. On introduit une variable aléatoire  $\theta$  uniforme sur l'intervalle  $[0, T]$  et indépendante des variables aléatoires  $a_k$ . On forme le signal

$$z(t) = y(t - \theta).$$

- Montrer que la moyenne de  $z(t)$  s'écrit

$$E[z(t)] = \frac{(1-p)H(0)}{T}$$

où  $H(f) = \text{TF}[h(t)]$  est la transformée de Fourier de  $h(t)$ .

La moyenne de  $z(t)$  est

$$E[z(t)] = (1-p) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} E[h(t-kT-\theta)].$$

Mais

$$E[h(t-kT-\theta)] = \int_0^T \frac{1}{T} h(t-kT-\theta) d\theta.$$

Après le changement de variables  $u = t - kT - \theta$ , on obtient

$$E[h(t-kT-\theta)] = \frac{1-p}{T} \int_{t-kT}^{t-(k+1)T} h(u)(-du) = \frac{1-p}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} h(u) du = \frac{(1-p)H(0)}{T}.$$

- Montrer que la fonction d'autocorrélation de  $z(t)$  s'écrit

$$r_z(\tau) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} r_a(k) r_h(\tau - kT)$$

où  $r_a(k) = E[a_n a_{n-k}]$  et où  $r_h(\tau)$  est la fonction d'autocorrélation de  $h(t)$ .

La fonction d'autocorrélation de  $z(t)$  est

$$\begin{aligned} E[z(t)z(t-\tau)] &= E \left[ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k h(t-kT-\theta) \sum_{l=-\infty}^{+\infty} a_l h(t-\tau-lT-\theta) \right] \\ &= \sum_k \sum_l E[a_k a_l] E[h(t-kT-\theta)h(t-\tau-lT-\theta)] \\ &= \sum_k \sum_l r_a(k-l) \int_0^T \frac{1}{T} h(t-kT-\theta)h(t-\tau-lT-\theta) d\theta. \end{aligned}$$

Après le changement de variables  $u = t - kT - \theta$ , on obtient

$$E[z(t)z(t-\tau)] = \sum_k \sum_l r_a(k-l) \int_{t-(k+1)T}^{t-kT} \frac{1}{T} h(u)h(u+(k-l)T-\tau) du.$$



D'où, en posant  $i = k - l$

$$\begin{aligned}
 E[z(t)z(t - \tau)] &= \sum_i \sum_l r_a(i) \int_{t-(i+l+1)T}^{t-(i+l)T} \frac{1}{T} h(u)h(u + iT - \tau) du \\
 &= \sum_i r_a(i) \left[ \sum_l \int_{t-(i+l+1)T}^{t-(i+l)T} \frac{1}{T} h(u)h(u + iT - \tau) du \right] \\
 &= \sum_i r_a(i) \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} h(u)h(u + iT - \tau) du \right] \\
 &= \frac{1}{T} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} r_a(i) r_h(\tau - iT).
 \end{aligned}$$

Cette expression qui montre que le signal  $z(t)$  est stationnaire s'appelle la formule de Benett. On notera

$$R_z(\tau) = \frac{1}{T} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} r_a(i) r_h(\tau - iT).$$

- Quel est l'intérêt d'avoir introduit une phase aléatoire  $\theta$  dans la définition de  $z(t)$  ?  
L'introduction d'une phase aléatoire  $\theta$  a permis de stationnariser le signal  $y(t)$ .
- Déterminer la densité spectrale de puissance de  $z(t)$  en fonction de  $T$ ,  $H(f)$  et de

$$s_a(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} r_a(k) e^{-j2\pi k T f}.$$

La densité spectrale de puissance de  $z(t)$  est

$$\begin{aligned}
 s_z(f) &= \text{TF}[R_z(\tau)] \\
 &= \frac{1}{T} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} r_a(i) \text{TF}[r_h(\tau - iT)] \\
 &= \frac{1}{T} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} r_a(i) e^{-j2i\pi T f} \text{TF}[r_h(\tau)] \\
 &= \frac{s_h(f)}{T} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} r_a(i) e^{-j2i\pi T f} \\
 &= \frac{s_h(f) s_a(f)}{T}.
 \end{aligned}$$

## 2.7.8 Filtrage adapté

On considère un signal déterministe à énergie finie  $s(t)$  défini sur l'intervalle  $[0, T]$  perturbé par un bruit  $b(t)$  additif stationnaire de moyenne nulle, de fonction d'autocorrélation  $R_b(\tau)$  et de densité spectrale de puissance  $s_b(f)$

$$x(t) = s(t) + b(t)$$

On filtre le signal  $x(t)$  à l'aide d'un filtre linéaire invariant dans le temps de réponse impulsionnelle  $h(t)$  et de transmittance  $H(f)$  et on note  $y(t) = x(t) * h(t)$  la sortie de ce filtre.

1) On note  $y_s(t_0)$  la sortie du filtre à l'instant  $t_0$  lorsque l'entrée est  $s(t)$ . Montrer que

$$y_s(t_0) = \int_{\mathbb{R}} S(f)H(f)e^{j2\pi ft_0} df$$

où  $S(f)$  est la transformée de Fourier du signal  $s(t)$ . Déterminer  $y_s(t_0)$  lorsque

$$s(t) = A\Pi_T\left(t - \frac{T}{2}\right) = \begin{cases} A & \text{si } t \in [0, T] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et } h(t) = \frac{1}{\sqrt{T}}\Pi_T\left(t - \frac{T}{2}\right) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{T}} & \text{si } t \in [0, T] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Tracer  $y_s(t_0)$  en fonction de  $t_0$ .

Puisque  $s(t)$  un signal à énergie finie,  $y_s(t)$  est aussi à énergie finie et

$$Y_s(f) = TF[y_s(t)] = S(f)H(f)$$

Donc

$$\begin{aligned} y_s(t) &= TF^{-1}[S(f)H(f)] \\ &= \int_{\mathbb{R}} S(f)H(f)e^{j2\pi ft} df \end{aligned}$$

En faisant  $t = t_0$  dans cette égalité, on obtient le résultat demandé.

Lorsque  $s(t) = AI_{[0,T]}(t)$ , on a

$$S(f) = AT \operatorname{sinc}(\pi T f) e^{-j\pi T f}$$

De plus, si  $h(t) = \frac{1}{\sqrt{T}}I_{[0,T]}(t)$ , on a

$$H(f) = \sqrt{T} \operatorname{sinc}(\pi T f) e^{-j\pi T f}$$

d'où

$$y_s(t) = A\sqrt{T} \int_{\mathbb{R}} T \operatorname{sinc}^2(\pi T f) e^{j2\pi f(t-T)} df$$

Mais

$$\begin{aligned} TF^{-1}[T \operatorname{sinc}^2(\pi T f)] &= \Lambda_T(\tau) \\ &= \int_{\mathbb{R}} T \operatorname{sinc}^2(\pi T f) e^{j2\pi f\tau} df \end{aligned}$$

Donc

$$y_s(t_0) = A\sqrt{T}\Lambda_T(t_0 - T)$$

2) Soit  $y_b(t_0)$  la sortie du filtre à l'instant  $t_0$  lorsque l'entrée est  $b(t)$ . Montrer que la puissance du signal  $y_b(t_0)$  s'écrit

$$E[y_b^2(t_0)] = \int_{\mathbb{R}} |H(f)|^2 s_b(f) df$$

Déterminer cette puissance pour  $s_b(f) = \frac{N_0}{2}$  et pour le filtre de la question précédente.

La relation de Wiener-Lee permet d'obtenir

$$s_{y_b}(f) = |H(f)|^2 s_b(f)$$

d'où

$$\begin{aligned} P_{y_b} &= E[y_b^2(t)] = R_{y_b}(0) \\ &= \int_{\mathbb{R}} s_{y_b}(f) df \\ &= \int_{\mathbb{R}} |H(f)|^2 s_b(f) df \end{aligned}$$

Lorsque  $b(t)$  est un bruit blanc de densité spectrale de puissance  $s_b(f) = \frac{N_0}{2}$  et pour le filtre de la question précédente, on a

$$\begin{aligned} P_{y_b} &= \frac{N_0}{2} \int_{\mathbb{R}} |H(f)|^2 df \\ &= \frac{N_0}{2} \int_{\mathbb{R}} |h(t)|^2 dt \text{ (égalité de Parseval)} \\ &= \frac{N_0}{2} \end{aligned}$$

3) On admet que le filtre qui maximise le rapport signal sur bruit à l'instant  $t_0$  ( $\text{SNR}(t_0) = y_s^2(t_0)/E[y_b^2(t_0)]$ ) est défini par

$$H_0(f) = k \frac{S^*(f)}{s_b(f)} e^{-j2\pi f t_0}$$

où  $k$  est une constante. Dans le cas d'un bruit blanc défini par  $s_b(f) = \frac{N_0}{2}$ , déterminer la réponse impulsionnelle de ce filtre notée  $h_0(t)$  en fonction de  $k, N_0, t_0$  et du signal  $s(t)$ . Tracer  $h_0(t)$  dans le cas du signal  $s(t) = A\Pi_T(t - \frac{T}{2})$ .

Dans le cas d'un bruit blanc défini par  $s_b(f) = \frac{N_0}{2}$ , on a

$$H_0(f) = \frac{2k}{N_0} S^*(f) e^{-j2\pi f t_0}$$

donc

$$\begin{aligned} h_0(t) &= TF^{-1}[H_0(f)] \\ &= \frac{2k}{N_0} TF^{-1}[S^*(f) e^{-j2\pi f t_0}] \end{aligned}$$

La TF inverse de  $S^*(f)$  est

$$TF^{-1}[S^*(f)] = s^*(-t)$$

donc

$$\begin{aligned} h_0(t) &= \frac{2k}{N_0} s^*[-(t - t_0)] \\ &= \frac{2k}{N_0} s^*[t_0 - t] \end{aligned}$$

4) On choisit  $t_0 = T$  et on suppose que  $s(t) = A\Pi_T(t - \frac{T}{2})$ ,  $h(t) = \frac{1}{\sqrt{T}}\Pi_T(t - \frac{T}{2})$  et que  $b(t)$  est un bruit blanc (de moyenne nulle) de densité spectrale de puissance  $s_b(f) = \frac{N_0}{2}$ .

- Déterminer  $y_s(T)$ .

D'après ce qui précède, on a

$$y_s(t_0) = A\sqrt{T}\Lambda_T(t_0 - T)$$

Donc en faisant  $t_0 = T$ , on obtient

$$y_s(T) = A\sqrt{T}$$

- Montrer que  $y_b(T)$  s'écrit

$$y_b(T) = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T b(u) du$$

En déduire la moyenne de  $y_b(T)$  notée  $E[y_b(T)]$ . On admettra que la variance de  $y_b(t)$  est  $\frac{N_0}{2}$ . On suppose maintenant que  $y_b(T)$  est un signal Gaussien. Déterminer la densité de probabilité du

signal  $y(T) = y_s(T) + y_b(T)$  notée  $p[y(T)|A]$ . On rappelle que la densité de probabilité d'une variable aléatoire  $X$  Gaussienne de moyenne  $m$  et de variance  $\sigma^2$  s'écrit

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right].$$

On a

$$\begin{aligned} y_b(t) &= b(t) * h(t) \\ &= \int_{\mathbb{R}} h(u)b(t-u)du \\ &= \int_0^T \frac{1}{\sqrt{T}}b(t-u)du \end{aligned}$$

En faisant  $t = T$  et en effectuant le changement de variables  $v = T - u$ , on obtient

$$y_b(T) = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T b(v)dv$$

On en déduit

$$\begin{aligned} E[y_b(T)] &= \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T E[b(v)]dv \\ &= \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T 0dv = 0 \end{aligned}$$

La variance de  $y_b(T)$  est

$$\begin{aligned} \text{var}[y_b(T)] &= E[y_b^2(T)] \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^T E[b(u)b(v)]dudv \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^T \frac{N_0}{2} \delta(u-v)dudv \\ &= \frac{N_0}{2T} \int_0^T \left[ \int_0^T \delta(u-v)du \right] dv \\ &= \frac{N_0}{2T} \int_0^T dv \\ &= \frac{N_0}{2} \end{aligned}$$

Si  $y_b(T)$  est un signal Gaussien, comme  $y_s(T)$  est un signal déterministe,  $y(T) = y_s(T) + y_b(T)$  est aussi un signal Gaussien de moyenne

$$E[y(T)] = y_s(T) + E[y_b(T)] = y_s(T) = A\sqrt{T}$$

et de variance

$$\text{var}[y(T)] = \text{var}[y_s(T) + y_b(T)] = \text{var}[y_b(T)] = \frac{N_0}{2}$$

Sa densité de probabilité s'écrit donc

$$p[y(T); A] = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp\left[-\frac{(y(T) - A\sqrt{T})^2}{N_0}\right]$$

5) On suppose que l'amplitude du signal déterministe  $A$  peut prendre deux valeurs, à savoir

$$\text{Hypothèse } H_0 : A = -1$$

$$\text{Hypothèse } H_1 : A = +1$$

et on désire déterminer quelle hypothèse est vérifiée à partir du signal reçu  $y(T)$  (qui est la sortie du filtre adapté à l'instant  $t_0 = T$ ). On adopte la stratégie suivante

$$H_0 \text{ est acceptée si } p [y(T) | A = -1] P [A = -1] > p [y(T) | A = +1] P [A = +1]$$

En notant  $p = P [A = +1]$  et  $q = 1 - p = P [A = -1]$ , montrer que cette stratégie consiste à comparer  $y(T)$  à un seuil qu'on explicitera en fonction de  $p, N_0$  et  $T$ . Que devient cette règle si  $p = q = \frac{1}{2}$  ?

La stratégie

$$H_0 \text{ est acceptée si } p [y(T); A = -1] P [A = -1] > p [y(T); A = +1] P [A = +1]$$

consiste à accepter  $H_0$  si

$$\frac{q}{\sqrt{\pi N_0}} \exp \left[ -\frac{(y(T) + \sqrt{T})^2}{N_0} \right] > \frac{p}{\sqrt{\pi N_0}} \exp \left[ -\frac{(y(T) - \sqrt{T})^2}{N_0} \right]$$

c'est-à-dire

$$\ln q - \frac{(y(T) + \sqrt{T})^2}{N_0} > \ln p - \frac{(y(T) - \sqrt{T})^2}{N_0} \iff \ln q - \frac{2\sqrt{T}y(T)}{N_0} > \ln p + \frac{2\sqrt{T}y(T)}{N_0}$$

d'où finalement

$$H_0 \text{ est acceptée si } y(T) < \ln \left( \frac{q}{p} \right) \frac{N_0}{2\sqrt{T}}$$

Dans le cas où  $p = q = \frac{1}{2}$ , on en déduit

$$H_0 \text{ est acceptée si } y(T) < 0$$

ce qui est une règle de décision logique.

### 2.7.9 Variance d'Allan

Soit  $x(t)$  un processus aléatoire stationnaire de moyenne  $E[x(t)] = 0$ , de fonction d'autocorrélation  $R_x(\tau)$  et de densité spectrale de puissance  $s_x(f)$ .

1) On considère l'opération définie par

$$y(t) = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} x(u) du$$

- Montrer que  $y(t) = F_T[x(t)]$ , où  $F_T$  est un filtre linéaire invariant dans le temps. Déterminer la réponse impulsionnelle  $h_T(t)$  et la transmittance  $H_T(f)$  de ce filtre  $F_T$ .  
Pour montrer qu'on a une opération de filtrage linéaire, il suffit de déterminer la réponse à  $X(t) = \exp(j2\pi ft)$  et de vérifier qu'elle s'écrit  $\exp(j2\pi ft)H(f)$ , où  $H(f)$  est une quantité indépendante de  $t$  qui est la transmittance du filtre (voir cours pour justification). Dans l'exemple de cet exercice, la réponse à  $X(t) = \exp(j2\pi ft)$  est

$$y(t) = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \exp(j2\pi fu) du = \frac{1}{T} \frac{\exp(j2\pi ft)}{j2\pi f} [\exp(j2\pi fT) - 1] = \exp(j2\pi ft)H_T(f)$$

avec

$$H_T(f) = \frac{1}{j2\pi fT} [\exp(j2\pi fT) - 1].$$

Donc  $Y(t)$  est obtenu par filtrage de  $X(t)$  avec un filtre de transmittance  $H(f)$  définie ci-dessus. La réponse impulsionnelle de ce filtre est  $h_T(t) = \text{TF}^{-1}[H_T(f)]$ . Pour déterminer cette transformée de Fourier inverse, on peut décomposer  $H(f)$  comme suit

$$H_T(f) = \exp(j\pi fT) \frac{\exp(j\pi fT) - \exp(-j\pi fT)}{j2\pi fT} = \exp(j\pi fT) \times \text{sinc}(\pi fT),$$

d'où

$$h_T(t) = \delta\left(t + \frac{T}{2}\right) * \frac{1}{T} \Pi_T(t) = \frac{1}{T} \Pi_T\left(t + \frac{T}{2}\right).$$

- Déterminer la densité spectrale de puissance du signal  $y(t)$  notée  $s_y(f)$  en fonction de  $s_x(f)$ . En déduire une expression intégrale permettant d'obtenir la fonction d'autocorrélation du signal  $y(t)$  notée  $R_y(\tau)$  en fonction de  $R_x(\tau)$ .

D'après la relation de Wiener-Lee, on a

$$\begin{aligned} s_y(f) &= s_x(f) |H_T(f)|^2 \\ &= s_x(f) \text{sinc}^2(\pi fT). \end{aligned}$$

On en déduit

$$R_y(\tau) = \text{TF}^{-1}[s_x(f) \text{sinc}^2(\pi fT)] = R_x(\tau) * \frac{1}{T} \Lambda_T(\tau)$$

d'où

$$R_y(\tau) = \frac{1}{T} \int R_x(s) * \Lambda_T(\tau - s) ds.$$

- Montrer que la puissance du signal  $y(t)$  s'écrit

$$P_y = \int s_x(f) \text{sinc}^2(\pi fT) df \quad \text{avec} \quad \text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}.$$

La puissance du signal  $y(t)$  est

$$P_y = \int_{-\infty}^{+\infty} s_y(f) df = \int_{-\infty}^{+\infty} s_x(f) \text{sinc}^2(\pi fT) df.$$

2) On considère le signal constant par morceaux défini par

$$D(t) = \frac{y[(k+1)T] - y[kT]}{\sqrt{2}} \text{ si } t \in [kT, (k+1)T[$$

- Déterminer la puissance du signal  $D(t)$  notée  $P_D(T)$  en fonction de  $R_y(0)$  et  $R_y(T)$  puis sous une forme intégrale dépendant de  $s_x(f)$ .

La puissance du signal  $D(t)$  est

$$P_D(T) = E[D^2(t)] = \frac{1}{2} \{E[y^2[(k+1)T]] + E[y^2[kT]] - 2E[y[kT]y[(k+1)T]]\}$$

soit

$$P_D(T) = \frac{1}{2} [R_y(0) + R_y(0) - 2R_y(T)] = R_y(0) - R_y(T).$$

En utilisant le fait que

$$R_y(\tau) = \int s_y(f) e^{j2\pi f\tau} df,$$

on obtient

$$P_D(T) = \int s_y(f) [1 - e^{j2\pi fT}] df = \int s_x(f) \text{sinc}^2(\pi fT) [1 - e^{j2\pi fT}] df$$

- En utilisant la parité de la densité spectrale de puissance  $s_x(f)$ , en déduire

$$P_D(T) = 4 \int_0^\infty \frac{\sin^4(\pi fT)}{(\pi fT)^2} s_x(f) df$$

La puissance  $P_D(T)$  est appelée **variance d'Allan** du signal  $x(t)$ .

Si on remarque que

$$1 - e^{j2\pi fT} = e^{j\pi fT} (e^{-j\pi fT} - e^{j\pi fT}) = -2j e^{j\pi fT} \sin(\pi fT) = -j \sin(2\pi fT) + 2 \sin^2(\pi fT).$$

on obtient

$$P_D(T) = \int -j \sin(2\pi fT) \text{sinc}^2(\pi fT) s_x(f) df + 2 \int \sin^2(\pi fT) \text{sinc}^2(\pi fT) s_x(f) df.$$

La première intégrale est nulle car c'est l'intégrale d'une fonction impaire. La seconde intégrale est l'intégrale d'une fonction paire, d'où

$$P_D(T) = 4 \int_0^\infty \frac{\sin^4(\pi fT)}{\pi^2 f^2 T^2} s_x(f) df.$$

3) On rappelle les relations suivantes

$$\int_0^\infty \frac{\sin^4(u)}{u^2} du = \frac{\pi}{4}, \int_0^\infty \frac{\sin^4(u)}{u^3} du = \log 2 \text{ et } \int_0^\infty \frac{\sin^4(u)}{u^4} du = \frac{\pi}{3}$$

Représenter graphiquement  $\log P_D(T)$  en fonction de  $\log T$  dans les cas suivants

- Bruit blanc :  $s_x(f) = K_0$ .

Dans ce cas

$$P_D(T) = 4K_0 \int_0^\infty \frac{\sin^4(\pi fT)}{\pi^2 f^2 T^2} df = \frac{K_0}{T}.$$

La courbe représentant  $\log P_D(T)$  en fonction de  $\log T$  est donc une droite de pente  $-1$  passant par  $\log(K_0)$  à l'origine.

- Bruit de Flicker :  $s_x(f) = \frac{K_1}{f}$ .

Dans ce cas

$$P_D(T) = 4 \int_0^\infty \frac{\sin^4(\pi fT)}{\pi^2 f^2 T^2} \frac{K_1}{f} df = 4K_1 \int_0^\infty \frac{\sin^4(u)}{u^3} du = 4K_1 \log(2).$$

La courbe représentant  $\log P_D(T)$  en fonction de  $\log T$  est donc une droite de pente 0 (parallèle à l'axe des abscisses).

- Marche aléatoire de fréquence :  $s_x(f) = \frac{K_2}{f^2}$ .  
Dans ce cas

$$P_D(T) = 4 \int_0^\infty \frac{\sin^4(\pi f T)}{\pi^2 f^2 T^2} \frac{K_2}{f^2} df = 4K_2\pi T \int_0^\infty \frac{\sin^4(u)}{u^4} du = \frac{4}{3}K_2\pi^2 T.$$

La courbe représentant  $\log P_D(T)$  en fonction de  $\log T$  est donc une droite de pente 1 passant par  $\log\left(\frac{4}{3}K_2\pi^2\right)$  à l'origine.

- À votre avis, quel est l'intérêt de la variance d'Allan ?  
En représentant la variance d'Allan  $P_D(T)$  en échelles logarithmiques et en identifiant la pente de la droite  $\log[P_D(T)] = a \log(T) + b$ , on peut identifier le type de bruit perturbant un signal donné.



### 3 Echantillonnage

L'objectif de ce paragraphe est d'expliquer comment les résultats concernant l'échantillonnage de signaux déterministes peuvent s'étendre aux signaux aléatoires stationnaires.

#### 3.1 Rappels

Dans le cas d'un signal déterministe  $x(t)$ , vous avez vu l'année dernière que la transformée du signal échantillonné  $x_e(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x(kT_e)\delta(t - kT_e) = x(t) \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(t - kT_e)$  s'obtenait par périodisation de la transformée de Fourier de  $x(t)$ , soit

$$X_e(f) = X(f) * F_e \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(f - kF_e) = F_e \sum_{k \in \mathbb{Z}} X(f - kF_e) \quad (15)$$

Cette relation est importante puisqu'elle indique que lorsque les spectres  $X(f - kF_e)$  ne se chevauchent pas, on peut récupérer  $X(f)$  par filtrage passe bas de  $X_e(f)$ , ce qui est en particulier possible lorsque  $F_e > 2f_{\max}$ , ce qui constitue le théorème de Shannon. En filtrant le signal  $x_e(t)$  par un filtre passe-bas idéal de transmittance  $H(f) = \frac{1}{F_e} \Pi_{F_e}(f)$  (et donc de réponse impulsionnelle  $h(t) = \text{sinc}[\pi F_e(t)]$ ), on obtient la formule de reconstruction de Shannon

$$x_r(t) = x(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x(kT_e) \text{sinc}[\pi F_e(t - kT_e)].$$

#### 3.2 Généralisation aux signaux aléatoires stationnaires

La relation (15) n'a aucun sens dans le cas d'un signal aléatoire stationnaire  $x(t)$  puisque la transformée de Fourier  $X(f)$  n'existe pas. Par contre, on peut montrer que **la densité spectrale de puissance d'un signal aléatoire stationnaire échantillonné est obtenue par périodisation de la densité spectrale de puissance du signal d'origine  $x(t)$** . Plus précisément, si on pose  $y(n) = x(nT_e)$  et  $\tilde{f} = \frac{f}{F_e}$ , on a

$$s_y(\tilde{f}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} R_y(k) e^{-j2\pi k \tilde{f}} = F_e \sum_{k \in \mathbb{Z}} s_x\left(\frac{\tilde{f} - k}{T_e}\right)$$

En effet

$$\begin{aligned} s_y(\tilde{f}) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} R_y(k) e^{-j2\pi k \tilde{f}} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} R_y(k) \int_{\mathbb{R}} e^{-j2\pi \tilde{f} t} \delta(t - k) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-j2\pi \tilde{f} t} \left[ \sum_{k \in \mathbb{Z}} R_x(kT_e) \delta(t - k) \right] dt \\ &= TF \left[ R_x(tT_e) \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(t - k) \right] \\ &= \frac{1}{T_e} s_x\left(\frac{\tilde{f}}{T_e}\right) * \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(\tilde{f} - k) \quad \text{CQFD} \end{aligned}$$

Par ailleurs, le théorème de Shannon pour les signaux aléatoires peut s'écrire de la manière suivante :

Si  $x(t)$  est un signal aléatoire stationnaire à bande limitée, i.e.,

$$s_x(f) = 0 \quad |f| > f_{\max}$$

et que  $F_e > 2f_{\max}$  alors

$$x_N(t) = \sum_{k=-N}^N x(kT_e) \operatorname{sinc}[\pi F_e(t - kT_e)] \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathcal{M}\mathcal{Q}} x(t)$$

Ce résultat généralise la formule de reconstruction de Shannon aux signaux aléatoires stationnaires. La preuve de ce résultat est par exemple disponible dans le livre de Papoulis [2, page 478].

## 4 Traitements non-linéaires

L'objectif de cette partie est d'expliquer comment on peut déterminer la fonction d'autocorrélation et la densité spectrale de puissance d'un signal défini par une transformée non-linéaire sans mémoire  $g$  d'un signal aléatoire stationnaire  $x(t)$ . Comme nous allons le voir, l'outil fondamental pour cette détermination est le théorème de Price qui est résumé ci-dessous dans sa version la plus simple (pour la preuve, on pourra par exemple consulter l'annexe 6.1 ou le livre de Bassel Solaiman [6, p. 112]).

### 4.1 Théorème de Price

Pour tout vecteur Gaussien centré  $\mathbf{X} = (X_1, X_2)^T$ , on a pour toute fonction non-linéaire  $g$

$$\frac{\partial E(Y_1 Y_2)}{\partial E(X_1 X_2)} = E \left( \frac{\partial Y_1}{\partial X_1} \frac{\partial Y_2}{\partial X_2} \right)$$

avec  $Y_1 = g(X_1)$  et  $Y_2 = g(X_2)$ . En considérant  $X_1 = x(t)$ ,  $X_2 = x(t - \tau)$ , on a  $Y_1 = y(t) = g[x(t)]$ ,  $Y_2 = y(t - \tau) = g[x(t - \tau)]$  et donc

$$\frac{\partial R_y(\tau)}{\partial R_x(\tau)} = E \left[ \frac{\partial y(t)}{\partial x(t)} \frac{\partial y(t - \tau)}{\partial x(t - \tau)} \right].$$

On remarquera que la relation ci-dessus utilise implicitement le fait que  $y(t) = g[x(t)]$  est un signal aléatoire stationnaire, ce qui découle du fait que  $\mathbf{x} = (x(t), x(t - \tau))^T$  est un vecteur Gaussien centré de matrice de covariance notée  $\Sigma$ . En effet

$$E [Y(t)Y(t - \tau)] = \int \int g(x_1) g(x_2) p(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad (16)$$

avec  $x_1 = X(t)$ ,  $x_2 = X(t - \tau)$  et

$$p(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{|\Sigma|}} \exp \left( -\frac{1}{2} \mathbf{x}^T \Sigma^{-1} \mathbf{x} \right)$$

avec

$$\Sigma = \begin{pmatrix} R_X(0) & R_X(\tau) \\ R_X(\tau) & R_X(0) \end{pmatrix}.$$

En injectant  $p(x_1, x_2)$  et  $\Sigma$  dans (16), on en déduit que  $E [Y(t)Y(t - \tau)]$  dépend uniquement de  $R_x(\tau)$  et de  $R_x(0)$  et ne dépend donc pas de  $t$ . De même

$$E [Y(t)] = \int g(x_1) p(x_1, \cdot) dx_1$$

où  $p(x_1, \cdot)$  est la densité de  $x_1 = x(t)$  définie par

$$p(x_1, \cdot) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} \exp \left( -\frac{x_1^2}{2\sigma_1^2} \right).$$

Comme  $\sigma_1^2 = \text{var}[x(t)] = R_x(0)$ , on en déduit que  $E [Y(t)]$  ne dépend que de  $R_x(0)$  et donc ne dépend pas de  $t$ .

### 4.2 Exemple d'application : le quadrateur

Dans le cas où  $y(t) = x^2(t)$ , l'application du théorème de Price permet d'obtenir

$$\frac{\partial R_y(\tau)}{\partial R_x(\tau)} = E \left[ \frac{\partial y(t)}{\partial x(t)} \frac{\partial y(t - \tau)}{\partial x(t - \tau)} \right] = 4E[x(t)x(t - \tau)] = 4R_x(\tau).$$

Cette équation s'intègre et conduit à

$$R_y(\tau) = 2R_x^2(\tau) + C$$

où  $C$  est une constante qui peut par exemple se déterminer en considérant la valeur particulière  $\tau = 0$  :

$$C = R_y(0) - 2R_x^2(0).$$

La détermination de  $R_y(0) = E[x^4(t)]$  se fait simplement si on connaît l'expression des moments d'une loi gaussienne centrée  $X$

$$E(X^{2n+1}) = 0, \quad E(X^{2n}) = [(2n-1) \times (2n-3) \dots \times 3 \times 1] \sigma^{2n}.$$

On obtient donc

$$E[x^2(t)] = \sigma^2 = R_x(0) \quad \text{et} \quad E[x^4(t)] = 3\sigma^4 = 3R_x^2(0)$$

d'où  $C = R_x^2(0)$ .

*Remarque : pour déterminer la constante  $C$ , on peut aussi utiliser le fait que si le signal gaussien centré est asymptotiquement décorréolé (i.e.,  $R_x(\tau)$  tend vers 0 lorsque  $\tau$  tend vers  $+\infty$ ), alors  $x(t)$  et  $x(t - \tau)$  sont asymptotiquement indépendants, d'où*

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} R_x(\tau) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} E[x^2(t)x^2(t - \tau)] = R_x^2(0).$$

On a donc

$$C = \lim_{\tau \rightarrow \infty} [R_y(\tau) - R_x^2(\tau)] = R_x^2(0).$$

On remarquera qu'il existe des signaux aléatoires gaussiens stationnaires tels que  $R_x(\tau)$  ne tend pas vers 0 lorsque  $\tau$  tend vers  $+\infty$ , par exemple

$$x(t) = Ae^{j2\pi f_0 t},$$

où  $A$  est une variable aléatoire gaussienne.

### 4.3 Autre exemple d'application : théorème de Van Vleck

L'application du théorème de Price est parfois plus compliquée que dans l'exemple précédent, comme nous allons le voir dans cet exemple où  $y(t) = \text{sign}[x(t)]$  (la fonction  $\text{sign}(x)$  vaut 1 pour  $x > 0$ , -1 pour  $x < 0$  et par convention  $\text{sign}(0) = 0$ ). Dans cet exemple, le théorème de Price permet d'obtenir

$$\frac{\partial R_y(\tau)}{\partial R_x(\tau)} = E \left[ \frac{\partial y(t)}{\partial x(t)} \frac{\partial y(t - \tau)}{\partial x(t - \tau)} \right] = 4E\{\delta[x(t)]\delta[x(t - \tau)]\}.$$

Pour déterminer  $R_y(\tau)$ , il faut déterminer le second membre de cette équation, ce qui se fait comme suit

$$E\{\delta[x(t)]\delta[x(t - \tau)]\} = \int \int \delta[x_1]\delta[x_2]p(x_1, x_2)dx_1dx_2.$$

d'où

$$E\{\delta[x(t)]\delta[x(t - \tau)]\} = \int \int \delta[x_1]\delta[x_2]p(0, 0)dx_1dx_2 = p(0, 0) = \frac{1}{2\pi\sqrt{|\Sigma|}}.$$

On en conclut

$$\frac{\partial R_y(\tau)}{\partial R_x(\tau)} = \frac{4}{2\pi\sqrt{R_x^2(0) - R_x^2(\tau)}}$$

qui s'intègre pour donner

$$R_y(\tau) = \frac{2}{\pi} \text{Arcsin} \left[ \frac{R_x(\tau)}{R_x(0)} \right] + C.$$

La constante  $C$  s'obtient en faisant  $\tau = 0$

$$C = R_y(0) - \frac{2}{\pi} \text{Arcsin}(1) = R_y(0) - 1.$$

Mais

$$R_y(0) = E[y^2(t)] = 1$$

d'où  $C = 0$  et

$$R_y(\tau) = \frac{2}{\pi} \text{Arcsin} \left[ \frac{R_x(\tau)}{R_x(0)} \right].$$

## 4.4 Exercices

### 4.4.1 Non-linéarité exponentielle

On considère un signal aléatoire réel  $x(t)$  gaussien de moyenne nulle. On suppose que ce signal est stationnaire de fonction d'autocorrélation  $R_x(\tau)$  et de densité spectrale de puissance  $s_x(f)$ . On forme le signal  $y(t) = \beta \alpha^{x(t)} = \beta \exp[x(t) \ln(\alpha)]$  avec  $\alpha > 0$  et  $\beta > 0$ .

1. À l'aide du théorème de Price, déterminer une expression de la fonction d'autocorrélation du signal  $y(t)$  notée  $R_y(\tau)$  en fonction de  $R_x(\tau)$  et d'une constante multiplicative notée  $K$ .

D'après le théorème de Price, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_y(\tau)}{\partial R_x(\tau)} &= E \left[ \frac{\partial y(t)}{\partial x(t)} \frac{\partial y(t-\tau)}{\partial x(t-\tau)} \right] \\ &= E [\ln(\alpha) y(t) \times \ln(\alpha) y(t-\tau)] \\ &= [\ln(\alpha)]^2 R_y(\tau). \end{aligned} \tag{17}$$

On en déduit

$$\frac{\partial R_y(\tau)}{R_y(\tau)} = [\ln(\alpha)]^2 \partial R_x(\tau).$$

En intégrant cette équation, on obtient

$$\ln |R_y(\tau)| = [\ln(\alpha)]^2 R_x(\tau) + C,$$

soit

$$R_y(\tau) = K \exp \{ [\ln(\alpha)]^2 R_x(\tau) \}.$$

2. On rappelle que la fonction génératrice des moments d'une variable aléatoire  $Z$  de loi gaussienne  $N(m, \sigma^2)$  est :

$$E [e^{Zu}] = \exp \left( mu + \frac{\sigma^2}{2} u^2 \right), \quad \forall u \in \mathbb{R}.$$

En déduire la constante  $K$ .

Pour trouver  $K$ , on fait  $\tau = 0$  dans l'expression de  $R_y(\tau)$  et on obtient

$$R_y(0) = K \exp \{ [\ln(\alpha)]^2 R_x(0) \} \Leftrightarrow K = \frac{R_y(0)}{\exp \{ [\ln(\alpha)]^2 R_x(0) \}}.$$

Mais

$$\begin{aligned} R_y(0) &= E[y^2(t)] \\ &= E [\beta^2 \exp(2 \ln(\alpha) x(t))] \\ &= \beta^2 E[e^{u x(t)}] \end{aligned} \tag{18}$$

avec  $u = 2 \ln(\alpha)$ . Comme  $x(t)$  est une variable aléatoire de moyenne nulle et de variance  $E[x^2(t)] = R_x(0)$ , on a

$$R_y(0) = \beta^2 \exp \left\{ \frac{1}{2} \times [2 \ln(\alpha)]^2 \times R_x(0) \right\} = \beta^2 \exp [2 \ln^2(\alpha) R_x(0)],$$

d'où

$$K = \frac{R_y(0)}{\exp \{[\ln(\alpha)]^2 R_x(0)\}} = \beta^2 \exp \{[\ln(\alpha)]^2 R_x(0)\}.$$

On en déduit

$$R_y(0) = \beta^2 \exp \{[\ln(\alpha)]^2 [R_x(0) + R_x(\tau)]\}.$$

*Remarque* : cet exercice est inspiré de l'exercice 4.11 de la page 254 du livre de J. Yang et C. Liu intitulé "Random Signal Analysis" publié chez l'éditeur Gruyter en 2018.

#### 4.4.2 Nonlinéarité Relu

On considère un signal aléatoire réel  $x(t)$  gaussien de moyenne nulle. On suppose que ce signal est stationnaire de fonction d'autocorrélation  $R_x(\tau)$  et de densité spectrale de puissance  $s_x(f)$ . On forme le signal  $y(t) = g[x(t)]$  avec

$$g(v) = \begin{cases} Av & \text{si } v \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où  $A$  est une constante strictement positive ( $A > 0$ ).

1. Montrer que  $E\{\text{sign}[x(t)]\} = 0$  (1pt).

$$\begin{aligned} E\{\text{sign}[x(t)]\} &= P[x(t) > 0] - P[x(t) < 0] \\ &= 2P[x(t) > 0] - 1 \\ &= 2 \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left[ -\frac{x^2(t)}{2\sigma^2} \right] dx(t) - 1 = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

2. Exprimer la dérivée de  $g$  en tout point  $u \neq 0$  en fonction de la fonction sign définie par

$$\text{sign}(u) = \begin{cases} 1 & \text{si } u > 0 \\ -1 & \text{si } u < 0. \end{cases}$$

À l'aide du théorème de Price, déterminer une expression de  $\frac{\partial R_y(\tau)}{\partial R_x(\tau)}$  en fonction de la fonction d'autocorrélation du signal  $u(t) = \text{sign}[x(t)]$  (1pt).

La dérivée de la fonction  $g$  est

$$g'(v) = AU(v) = \begin{cases} A & \text{si } v > 0 \\ 0 & \text{si } v < 0, \end{cases}$$

où  $U$  est l'échelon de Heaviside, soit  $g'(v) = AU(v) = \frac{A}{2} [1 + \text{sign}(v)]$ . D'après le théorème de Price

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_y(\tau)}{\partial R_x(\tau)} &= E \left[ \frac{\partial y(t)}{\partial x(t)} \frac{\partial y(t-\tau)}{\partial x(t-\tau)} \right] \\ &= \frac{A^2}{4} E \{ (1 + \text{sign}[x(t)])(1 + \text{sign}[x(t-\tau)]) \} \\ &= \frac{A^2}{4} [1 + R_u(\tau)]. \end{aligned} \quad (20)$$

3. On rappelle que la fonction d'autocorrélation du signal  $u(t) = \text{sign}[x(t)]$  (déterminée en TD) est définie par

$$R_u(\tau) = \frac{2}{\pi} \text{Arcsin} \left[ \frac{R_x(\tau)}{R_x(0)} \right]$$

et qu'on a le résultat suivant

$$\int \text{Arcsin} \left( \frac{x}{a} \right) dx = x \text{Arcsin} \left( \frac{x}{a} \right) + a \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

En déduire  $R_y(\tau)$  en fonction de  $R_x(\tau)$  et d'une constante additive notée  $C$  (1pt).

En utilisant le rappel et le résultat de la question précédente, on a

$$\frac{\partial R_y(\tau)}{\partial R_x(\tau)} = \frac{A^2}{4} + \frac{A^2}{2\pi} \text{Arcsin} \left[ \frac{R_x(\tau)}{R_x(0)} \right]$$

soit

$$R_y(\tau) = \frac{A^2}{4} R_x(\tau) + \frac{A^2}{2\pi} R_x(\tau) \text{Arcsin} \left[ \frac{R_x(\tau)}{R_x(0)} \right] + \frac{A^2}{2\pi} R_x(0) \sqrt{1 - \frac{R_x^2(\tau)}{R_x^2(0)}} + C.$$

4. Déterminer la constante  $C$  (1pt).

On a

$$C = R_y(0) - \frac{A^2}{4} R_x(0) - \frac{A^2}{4} R_x(0) - 0 = R_y(0) - \frac{A^2}{2} R_x(0).$$

Mais

$$R_y(0) = E[y^2(t)] = E\{A^2 x^2(t) U^2[x(t)]\}.$$

avec  $U[x(t)] = 1$  si  $x(t) > 0$  et 0 sinon. Donc

$$R_y(0) = A^2 \int_0^\infty x^2(t) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{x^2(t)}{2\sigma^2}\right) dx(t) = \frac{A^2}{2} \sigma^2 = \frac{A^2}{2} R_x(0)$$

d'où  $C = 0$ .

*Remarque* : cet exercice est inspiré de l'exercice 4.11 de la page 222 du livre de J. Yang et C. Liu intitulé "Random Signal Analysis" publié chez l'éditeur Gruyter en 2018.

#### 4.4.3 Filtre exponentiel

On considère un filtre non-linéaire dit exponentiel qui transforme un signal aléatoire  $X(t)$  en un signal aléatoire  $Y(t)$  tel que

$$Y(t) = \exp[X(t)].$$

On supposera dans cet exercice que  $X(t)$  est un signal Gaussien stationnaire de moyenne nulle et de fonction d'autocorrélation  $r_X(\tau)$ .

1. Qu'est-ce qu'un signal Gaussien ? Justifier brièvement le fait que  $Y(t)$  est un signal aléatoire stationnaire.

Un bruit blanc est un bruit stationnaire dont la densité spectrale de puissance est constante. Un bruit Gaussien est un bruit tel que le vecteur  $(X(t_1), \dots, X(t_n))$  possède une densité de probabilité Gaussienne pour tout vecteur  $(t_1, \dots, t_n)$ . Toute transformation sans mémoire d'un signal aléatoire stationnaire est stationnaire (voir cours).

2. On rappelle que la fonction génératrice des moments d'une variable aléatoire  $Z$  de loi normale  $N(0, \sigma^2)$  est

$$m(u) = E[e^{uZ}] = \exp\left(\frac{\sigma^2}{2}u^2\right).$$

En déduire  $E[Y(t)]$  et  $E[Y^2(t)]$ .

La moyenne de  $Y(t)$  est définie par

$$\begin{aligned} E[Y(t)] &= E[e^{X(t)}] \\ &= m(1) = \boxed{\exp\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)} \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} E[Y^2(t)] &= E[e^{2X(t)}] \\ &= m(2) = \boxed{\exp(2\sigma^2)} \end{aligned}$$

3. Déterminer la fonction d'autocorrélation de  $Y(t)$  en fonction de celle de  $X(t)$ .

Le théorème de Price s'écrit

$$\frac{\partial E[Y(t)Y(t-\tau)]}{\partial E[X(t)X(t-\tau)]} = E\left[\frac{\partial Y(t)}{\partial X(t)} \frac{\partial Y(t-\tau)}{\partial X(t-\tau)}\right]$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial R_Y(\tau)}{\partial R_X(\tau)} = E[Y(t)Y(t-\tau)] \Leftrightarrow \frac{\partial R_Y(\tau)}{R_Y(\tau)} = \partial R_X(\tau)$$

L'intégration de cette équation donne

$$\ln |R_Y(\tau)| = R_X(\tau) + \text{constante} \Leftrightarrow \boxed{R_Y(\tau) = C \exp[R_X(\tau)]}$$

La constante  $C$  peut se déterminer en faisant  $\tau = 0$  puisque d'après la question 2)

$$R_Y(0) = E[Y^2(t)] = \exp(2\sigma^2)$$

et

$$C \exp[K_X(0)] = C \exp(\sigma^2)$$

En égalant ces deux termes, on obtient

$$C = \frac{\exp(2\sigma^2)}{\exp(\sigma^2)} = \exp(\sigma^2)$$

d'où le résultat final

$$\boxed{R_Y(\tau) = \exp[K_X(\tau) + \sigma^2]}$$

#### 4.4.4 Nonlinéarité cubique

On considère un signal aléatoire réel  $x(t)$  gaussien de moyenne nulle. On suppose que ce signal est stationnaire de fonction d'autocorrélation  $R_x(\tau)$  et de densité spectrale de puissance  $s_x(f)$ . On forme le signal  $y(t) = x^3(t)$ . On rappelle que la fonction d'autocorrélation de la sortie du quadrateur (déterminée en cours) est

$$R_{x^2}(\tau) = 2R_x^2(\tau) + R_x^2(0).$$



1. Déterminer une expression de la fonction d'autocorrélation du signal  $y(t)$  notée  $R_y(\tau)$  en fonction de  $R_x(\tau)$  et d'une constante additive  $C$ .

D'après le théorème de Price

$$\begin{aligned}\frac{\partial R_y(\tau)}{\partial R_x(\tau)} &= E \left[ \frac{\partial y(t)}{\partial x(t)} \frac{\partial y(t-\tau)}{\partial x(t-\tau)} \right] \\ &= 9E [x^2(t)x^2(t-\tau)] \\ &= 9[2R_x^2(\tau) + R_x^2(0)].\end{aligned}\quad (21)$$

Par intégration, on obtient

$$R_y(\tau) = 6R_x^3(\tau) + 9R_x(\tau)R_x^2(0) + C.$$

2. On rappelle que pour une variable aléatoire  $Z$  de loi gaussienne de moyenne nulle et de variance  $\sigma^2$ , on a pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$

$$E [Z^{2n}] = [(2n-1)(2n-3) \times \dots \times 5 \times 3 \times 1] \sigma^{2n}.$$

En déduire la valeur de la constante  $C$ .

En faisant  $\tau = 0$  dans l'égalité précédente, on obtient

$$C = R_y(0) - 6R_x^3(0) + 9R_x^3(0) = R_y(0) - 15R_x^3(0).$$

Mais

$$R_y(0) = E[y^2(t)] = E[x^6(t)] = (5 \times 3 \times 1)R_x^3(0).$$

Donc  $C = 0$ .

#### 4.4.5 Puissance quatrième d'un signal aléatoire

On considère un signal aléatoire réel  $x(t)$  gaussien de moyenne nulle. On suppose que ce signal est stationnaire de fonction d'autocorrélation  $R_x(\tau)$  et de densité spectrale de puissance  $s_x(f)$ . On forme le signal  $y(t) = x^4(t)$ . On rappelle que la fonction d'autocorrélation de la sortie du signal cubique  $z(t) = x^3(t)$  (déterminée en TD) est

$$R_z(\tau) = R_{x^3}(\tau) = 6R_x^3(\tau) + 9R_x(\tau)R_x^2(0).$$

1. Déterminer une expression de la fonction d'autocorrélation du signal  $y(t)$  notée  $R_y(\tau)$  en fonction de  $R_x(\tau)$  et d'une constante additive  $C$ .

D'après le théorème de Price

$$\begin{aligned}\frac{\partial R_y(\tau)}{\partial R_x(\tau)} &= E \left[ \frac{\partial y(t)}{\partial x(t)} \frac{\partial y(t-\tau)}{\partial x(t-\tau)} \right] \\ &= 16E [x^3(t)x^3(t-\tau)] \\ &= 16[6R_x^3(\tau) + 9R_x(\tau)R_x^2(0)].\end{aligned}\quad (22)$$

Par intégration, on obtient

$$R_y(\tau) = 24R_x^4(\tau) + 72R_x^2(\tau)R_x^2(0) + C.$$

2. On rappelle que pour une variable aléatoire  $Z$  de loi gaussienne de moyenne nulle et de variance  $\sigma^2$ , on a pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$

$$E[Z^{2n}] = [(2n-1) \times (2n-3) \times \dots \times 5 \times 3 \times 1] \sigma^{2n}.$$

En déduire la valeur de la constante  $C$ .

Pour trouver  $C$ , on peut faire  $\tau = 0$  dans l'expression de  $R_y(\tau)$  :

$$C = R_y(0) - 24R_x^4(0) - 72R_x^4(0).$$

Mais

$$R_y(0) = E[y^2(t)] = E[x^8(t)] = (7 \times 5 \times 3)R_x^4(0),$$

d'où

$$C = [(7 \times 15) - 24 - 72]R_x^4(0) = 9R_x^4(0).$$

#### 4.4.6 Écrétage progressif d'un signal aléatoire

On considère une non-linéarité modélisant une distorsion de type à "écrétage progressif"

$$G(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du - \frac{1}{2}.$$

On l'applique à un processus gaussien réel  $X(t)$  stationnaire de moyenne nulle

$$Y(t) = G[X(t)].$$

On rappelle que pour un tel processus, la loi du couple  $(U, V) = (X(t), X(t - \tau))$  est gaussienne de densité de probabilité

$$f(u, v) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det \Sigma}} \exp \left[ -\frac{1}{2} (u, v) \Sigma^{-1} (u, v)^T \right]$$

où  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$  et où  $\Sigma$  est la matrice de covariance du couple  $(U, V)$  définie par

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \text{var}(U) & \text{cov}(U, V) \\ \text{cov}(U, V) & \text{var}(V) \end{pmatrix}$$

- 1) Exprimer les éléments de  $\Sigma$  en fonction de  $R_X(\tau)$  et  $R_X(0)$ . En déduire que l'autocorrélation du signal  $Y(t)$  ne dépend que de  $R_X(\tau)$  et  $R_X(0)$ .

Cette question est très classique et a été vue en cours :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} R_X(0) & R_X(\tau) \\ R_X(\tau) & R_X(0) \end{pmatrix}.$$

De plus

$$\begin{aligned} R_Y(\tau) &= E[Y(t)Y^*(t - \tau)] \\ &= E \{ G[X(t)]G[X(t - \tau)] \} \\ &= \int \int G(u)G(v)f_{\Sigma}(u, v)dudv. \end{aligned}$$

La fonction d'autocorrélation du signal  $Y(t)$  ne dépend donc que des éléments de  $\Sigma$ , c'est-à-dire de  $R_X(\tau)$  et de  $R_X(0)$ .

2) On admet que pour un signal Gaussien stationnaire de moyenne nulle et de fonction d'autocorrélation  $R_X(\tau)$ , on a

$$E \left\{ \exp \left[ -\frac{X^2(t) + X^2(t - \tau)}{2} \right] \right\} = \frac{1}{\sqrt{(1 + R_X(0))^2 - R_X^2(\tau)}}.$$

et on rappelle la primitive suivante

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - u^2}} du = \arcsin \left( \frac{u}{|a|} \right)$$

En déduire  $R_Y(\tau)$  en fonction de  $R_X(\tau)$  à une constante additive près qu'on ne demande pas de calculer. D'après le théorème de Price

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_Y(\tau)}{\partial R_X(\tau)} &= E \left[ \frac{\partial Y(t)}{\partial X(t)} \frac{\partial Y(t - \tau)}{\partial X(t - \tau)} \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} E \left\{ \exp \left[ -\frac{X^2(t)}{2} \right] \exp \left[ -\frac{X^2(t - \tau)}{2} \right] \right\} \end{aligned} \quad (23)$$

$$= \frac{1}{2\pi} E \left\{ \exp \left[ -\frac{X^2(t) + X^2(t - \tau)}{2} \right] \right\} = \frac{1}{\sqrt{(1 + R_X(0))^2 - R_X^2(\tau)}}. \quad (24)$$

Par intégration, on obtient

$$R_Y(\tau) = \text{Arcsin} \left( \frac{R_X(\tau)}{1 + R_X(0)} \right) + C.$$

Pour trouver la constante  $C$ , on peut faire un passage à la limite quand  $\tau$  tend vers  $+\infty$ . On a alors

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} R_X(\tau) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} E[Y(t)Y(t - \tau)] = E^2[Y(t)].$$

On a donc

$$C = \lim_{\tau \rightarrow \infty} [R_Y(\tau) - R_Y^2(\tau)] = E^2[Y(t)].$$

Comme la fonction  $G$  est impaire, on a

$$E \{ G[X(t)] \} = \int G(u) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}} du = 0.$$

d'où  $C = 0$ .

#### 4.4.7 Amplificateur Klystron

On considère un filtre non-linéaire qui transforme un signal aléatoire  $X(t)$  en un signal aléatoire  $Y(t)$  tel que

$$Y(t) = X(t) - kX^3(t)$$

On supposera dans cet exercice que  $X(t)$  est un signal Gaussien stationnaire de moyenne nulle et de fonction d'autocorrélation  $R_X(\tau)$ . On rappelle que pour un tel processus, la loi du couple  $(U, V) = [X(t), X(t - \tau)]$  est gaussienne de densité de probabilité

$$f_{\Sigma}(u, v) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det \Sigma}} \exp \left[ -\frac{1}{2}(u, v)\Sigma^{-1}(u, v)^T \right]$$

où  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$  et où  $\Sigma$  est la matrice de covariance du couple  $(U, V)$  définie par

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \text{var}(U) & \text{cov}(U, V) \\ \text{cov}(U, V) & \text{var}(V) \end{pmatrix}$$

1. Exprimer les éléments de  $\Sigma$  en fonction de  $R_X(\tau)$  et  $R_X(0)$ . Exprimer l'autocorrélation du signal  $Y(t)$  en fonction de la loi de  $(U, V) = [X(t), X(t - \tau)]$  et en déduire qu'elle ne dépend que de  $R_X(\tau)$  et  $R_X(0)$ .

Cette question est très classique et a été vue en cours :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} R_X(0) & R_X(\tau) \\ R_X(\tau) & R_X(0) \end{pmatrix}.$$

De plus

$$\begin{aligned} R_Y(\tau) &= E[Y(t)Y^*(t - \tau)] \\ &= E \{ [X(t) - kX^3(t)][X(t - \tau) - kX^3(t - \tau)] \} \\ &= \int \int (u - ku^3)(v - kv^3) f_{\Sigma}(u, v) dudv. \end{aligned}$$

La fonction d'autocorrélation du signal  $Y(t)$  ne dépend donc que des éléments de  $\Sigma$ , c'est-à-dire de  $R_X(\tau)$  et de  $R_X(0)$ .

2. Déterminer la fonction d'autocorrélation de  $Y(t)$  en fonction de celle de  $X(t)$  et d'une constante additive notée  $C$ . Rappel : on pourra utiliser l'expression de fonction d'autocorrélation de la sortie du quadrateur (déterminée en cours)

$$E[X^2(t)X^2(t - \tau)] = 2R_X^2(\tau) + R_X^2(0)$$

D'après le théorème de Price

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_Y(\tau)}{\partial R_X(\tau)} &= E \left[ \frac{\partial y(t)}{\partial x(t)} \frac{\partial y(t - \tau)}{\partial x(t - \tau)} \right] \\ &= E \{ [1 - 3kX^2(t)][1 - 3kX^2(t - \tau)] \} \\ &= 1 - 3kE[X^2(t)] - 3kE[X^2(t - \tau)] + 9k^2E[X^2(t)X^2(t - \tau)] \\ &= 1 - 6kR_X(0) + 9k^2 [2R_X^2(\tau) + R_X^2(0)] \\ &= [1 - 3kR_X(0)]^2 + 18k^2R_X^2(\tau). \end{aligned}$$

Par intégration, on obtient

$$R_Y(\tau) = [1 - 3kR_X(0)]^2 R_X(\tau) + 6k^2 R_X^3(\tau) + C.$$

3. On rappelle que les moments d'un signal Gaussien de moyenne nulle  $X(t)$  vérifient la relation suivante

$$m_{2n} = E[X^{2n}(t)] = [(2n - 1)(2n - 3) \times \dots \times 5 \times 3 \times 1] R_X^n(0)$$

En déduire la valeur de  $C$ .

La constante  $C$  s'obtient classiquement en faisant  $\tau = 0$  dans (2)

$$C = R_Y(0) - [1 - 3kR_X(0)]^2 R_X(0) - 6k^2 R_X^3(0).$$

L'expression de  $R_Y(0)$  se calcule comme suit

$$\begin{aligned} R_Y(0) &= E[Y^2(t)] \\ &= E[X^2(t) - 2kX^4(t) + k^2X^6(t)] \\ &= 1 - 2km_4 + k^2m_6. \end{aligned}$$

En utilisant le rappel, on obtient

$$R_Y(0) = R_X(0) - 6kR_X^2(0) + 15k^2R_X^3(0)$$

et donc

$$C = R_X(0) - 6kR_X^2(0) + 15k^2R_X^3(0) - [1 - 3kR_X(0)]^2R_X(0) - 6k^2R_X^3(0) = 0.$$

*Remarque : on peut retrouver ce résultat en faisant  $\tau \rightarrow \infty$  dans (2).*

#### 4.5 Ecrêtage dur d'un signal aléatoire

Soit un signal aléatoire gaussien réel  $x(t)$  de moyenne nulle, de fonction d'autocorrélation  $R_x(\tau)$  et de densité spectrale de puissance  $s_x(f)$  (ce signal est donc stationnaire). On considère le signal  $y(t)$  défini par  $y(t) = G[x(t)]$  où  $G$  modélise un écrêtage dur défini par  $G(x) = L\text{sgn}[x]$ , c'est-à-dire

$$y(t) = L \text{ si } x(t) > 0 \quad (25)$$

$$y(t) = -L \text{ si } x(t) < 0. \quad (26)$$

1. On rappelle que la densité de probabilité du vecteur  $[U, V] = [x(t), x(t - \tau)]$  est

$$f_{\Sigma}(u, v) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det \Sigma}} \exp \left[ -\frac{1}{2}(u, v)\Sigma^{-1}(u, v)^T \right]$$

où  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$  et où  $\Sigma$  est la matrice de covariance du couple  $(U, V)$  définie par

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \text{var}(U) & \text{cov}(U, V) \\ \text{cov}(U, V) & \text{var}(V) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_x(0) & R_x(\tau) \\ R_x(\tau) & R_x(0) \end{pmatrix}$$

Montrer que  $E \{ \delta[x(t)]\delta[x(t - \tau)] \} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det(\Sigma)}}$ , où  $\det(\Sigma)$  est le déterminant de la matrice  $\Sigma$ .

On a

$$\begin{aligned} E \{ \delta[x(t)]\delta[x(t - \tau)] \} &= \int \int \delta(u)\delta(v)f_{\Sigma}(u, v)dudv \\ &= f_{\Sigma}(0, 0) \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{\det(\Sigma)}}. \end{aligned}$$

2. On rappelle que la dérivée de la fonction  $G$  est  $G'(x) = 2L\delta(x)$ . Déterminer la fonction d'autocorrélation du signal  $y(t)$  en fonction de celle du signal  $x(t)$  et d'une constante additive notée  $C$ . Déterminer la constante  $C$ .

*Indication : on rappelle la primitive suivante*

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - u^2}} du = \arcsin \left( \frac{u}{|a|} \right).$$

D'après le théorème de Price, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_y(\tau)}{\partial R_x(\tau)} &= E \left[ \frac{\partial y(t)}{\partial x(t)} \frac{\partial y(t - \tau)}{\partial x(t - \tau)} \right] \\ &= E \{ 2L\delta[x(t)] \times 2L\delta[x(t - \tau)] \} \\ &= 4L^2 E \{ \delta[x(t)]\delta[x(t - \tau)] \} \\ &= \frac{2L^2}{\pi\sqrt{\det(\Sigma)}} \\ &= \frac{2L^2}{\pi\sqrt{R_x^2(0) - R_x^2(\tau)}}. \end{aligned}$$

Par intégration, on obtient

$$R_Y(\tau) = \frac{2L^2}{\pi} \text{Arcsin} \left[ \frac{R_x(\tau)}{R_x(0)} \right] + C. \quad (27)$$

3. Déterminer la constante d'intégration  $C$ .

La constante d'intégration peut se déterminer comme d'habitude en faisant  $\tau = 0$

$$C = R_y(0) - \frac{2L^2}{\pi} \text{Arcsin} \left[ \frac{R_x(0)}{R_x(0)} \right] = R_Y(0) - L^2.$$

Mais

$$R_y(0) = E[y^2(t)] = E[L^2] = L^2.$$

On en conclut

$$C = 0.$$

## 5 Processus de Poisson homogène

Dans certaines applications, on est amené à considérer des instants aléatoires modélisant par exemple le départ ou l'arrivée d'évènements particuliers. C'est dans ce contexte qu'on peut utiliser des suites d'instants possédant des propriétés spécifiques formant un **processus de Poisson**.

### 5.1 Définition

Soit une suite d'instants  $\{t_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  et  $N(t, \tau)$  le nombre de ces instants appartenant à l'intervalle  $[t, t + \tau[$ . Le nombre d'instants appartenant à l'intervalle  $[0, t[$ , noté  $N(t) = N(0, t)$ , est un **processus de Poisson homogène** si les trois propriétés suivantes sont vérifiées

- **Stationnarité** (régime établi) :  $P_n(\tau) = P[N(t, \tau) = n]$  est indépendante de  $t$ .
- **Indépendance du passé et de l'avenir** (non embouteillage) : si  $[t, t + \tau[$  et  $[t', t' + \tau'[$  sont des intervalles disjoints, alors  $N(t, \tau)$  et  $N(t', \tau')$  sont des va indépendantes.
- **Non accumulation** (non simultanéité des instants  $t_i$ ) : si  $\phi(\tau) = P[N(t, \tau) \geq 2]$ , alors  $\frac{\phi(\tau)}{\tau} \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} 0$

On admettra que ces trois propriétés sont vérifiées si et seulement si (condition nécessaire et suffisante)  $N(t, \tau)$  suit une loi de **Poisson** de paramètre  $\lambda|\tau|$ , où  $\lambda$  est le nombre moyen d'instants dans un intervalle de largeur  $\tau = 1$ , ce qui explique la terminologie "Processus de Poisson" utilisée pour  $N(t)$ . On notera que le paramètre  $\lambda$  permet d'ajuster la quantité moyenne d'instants  $t_j$  contenus dans un intervalle de durée fixe, qui dépend de l'application considérée.

### 5.2 Propriétés

Un processus de Poisson homogène vérifie les deux propriétés suivantes

- **Loi des largeurs d'intervalles**  
Si  $L_n = t_{n+1} - t_n$ , alors  $\{L_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  est une suite de va indépendantes de lois **exponentielles** de paramètre  $\lambda$ . Cette propriété indique que pour générer un processus de Poisson, il suffit de générer les variables aléatoires  $L_n$  suivant des réalisations indépendantes d'une loi exponentielle de paramètre de paramètre  $\lambda$ .
- **Loi des instants**  
Si l'intervalle  $[0, t[$  contient  $n$  instants  $t_1, \dots, t_n$ , alors chaque instant  $t_i$  suit une loi **uniforme** sur  $[0, t[$ .

### 5.3 Signal des télégraphistes

Le signal des télégraphistes appelée aussi basculeur Poissonien est un signal aléatoire  $x(t)$  défini par

$$x(t) = \begin{cases} A & \text{si } t = 0 \\ A & \text{si } N(0, t) \text{ pair} \\ -A & \text{si } N(0, t) \text{ impair} \end{cases}$$

où  $A$  est une variable aléatoire uniforme sur  $\{-1, +1\}$  indépendante de  $N(t, \tau), \forall t, \forall \tau$ . Nous allons montrer que le signal aléatoire  $x(t)$  est stationnaire de moyenne  $E[x(t)] = 0$  et de fonction d'autocorrélation  $R_x(\tau) = e^{-2\lambda|\tau|}$ .

- **Moyenne**

$$E[X(t)] = 2P[X(t) = 1] - 1.$$

Mais

$$\begin{aligned} P[X(t) = 1] &= P[\text{“}A = 1 \text{ et } N(0, t) \text{ pair” ou “}A = -1 \text{ et } N(0, t) \text{ impair”}] \\ &= P[A = 1]P[N(0, t) \text{ pair}] + P[A = -1]P[N(0, t) \text{ impair}] \\ &= \frac{1}{2}P[N(0, t) \text{ pair}] + \frac{1}{2}P[N(0, t) \text{ impair}] \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{E[X(t)] = 0}.$$

- **Fonction d'autocorrélation**

$$E[X(t)X(t - \tau)] = 2P[X(t)X(t - \tau) = 1] - 1.$$

Mais

$$\begin{aligned} P[X(t)X(t - \tau) = 1] &= P[N(t, \tau) \text{ pair}] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P[N(t, \tau) = 2k] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda|\tau|)^{2k}}{(2k)!} \exp(-\lambda|\tau|) \\ &= \left[ \frac{\exp(-\lambda|\tau|) + \exp(\lambda|\tau|)}{2} \right] \exp(-\lambda|\tau|) \\ &= \frac{1}{2} [1 + \exp(-2\lambda|\tau|)]. \end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{R_x(\tau) = e^{-2\lambda|\tau|}, \forall \tau \in \mathbb{R}}$$

- **Densité spectrale de puissance**

$$s_x(f) = \text{TF}[R_x(\tau)] = \frac{\lambda}{\lambda^2 + \pi^2 f^2}, \forall f \in \mathbb{R}.$$

Cette fonction est appelée “Lorentzienne”.



## 6 Annexes

### 6.1 Preuve du théorème de Price

Pour tout vecteur Gaussien centré  $\mathbf{X} = (X_1, X_2)^T$ , on a pour toute fonction non-linéaire  $g$  telle que  $Y_1 = g(X_1)$  et  $Y_2 = g(X_2)$  le résultat suivant

$$\frac{\partial E(Y_1 Y_2)}{\partial E(X_1 X_2)} = E \left( \frac{\partial Y_1}{\partial X_1} \frac{\partial Y_2}{\partial X_2} \right)$$

Le vecteur  $\mathbf{X} = (X_1, X_2)^T$  étant Gaussien centré, il possède la densité

$$p(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi\sqrt{|\Sigma|}} \exp \left[ -\frac{1}{2} (\mathbf{x}^T \Sigma^{-1} \mathbf{x}) \right]$$

avec  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$  et  $\Sigma \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  est la matrice de covariance définie par

$$\Sigma = \begin{pmatrix} E[X_1^2] & E[X_1 X_2] \\ E[X_1 X_2] & E[X_2^2] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & E[X_1 X_2] \\ E[X_1 X_2] & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

donc

$$E[g(X_1)g(X_2)] = \int \int g(x_1)g(x_2)p(\mathbf{x})dx_1dx_2.$$

On suppose que les deux fonctions non-linéaires  $g(x_1)$  et  $g(x_2)$  ont des transformées de Fourier telles que

$$G(f_1) = \int g(x_1)e^{-j2\pi f_1 x_1} dx_1 \text{ et } G(f_2) = \int g(x_2)e^{-j2\pi f_2 x_2} dx_2.$$

On a alors

$$g(x_1) = \text{TF}^{-1}[G(f_1)] = \int G(f_1)e^{j2\pi f_1 x_1} df_1 \text{ et } g(x_2) = \text{TF}^{-1}[G(f_2)] = \int G(f_2)e^{j2\pi f_2 x_2} df_2$$

et donc

$$E[g(X_1)g(X_2)] = \int \int \left[ \int G(f_1)e^{j2\pi f_1 x_1} df_1 \right] \left[ \int G(f_2)e^{j2\pi f_2 x_2} df_2 \right] p(\mathbf{x})dx_1dx_2.$$

En supposant qu'on peut intervertir les différentes intégrales, on obtient

$$E[g(X_1)g(X_2)] = \int \int G(f_1)G(f_2) \left[ \int \int e^{j2\pi(f_1 x_1 + f_2 x_2)} p(\mathbf{x})dx_1dx_2 \right] df_1 df_2$$

Cette expression fait intervenir la fonction caractéristique  $\phi$  du vecteur Gaussien  $\mathbf{X} = (X_1, X_2)^T$  qui est connue, d'où

$$\begin{aligned} \int \int e^{j2\pi(f_1 x_1 + f_2 x_2)} p(\mathbf{x})dx_1dx_2 &= \phi(2\pi f_1, 2\pi f_2) \\ &= \exp \left\{ -\frac{1}{2} [2\pi f_1, 2\pi f_2] \Sigma \begin{bmatrix} 2\pi f_1 \\ 2\pi f_2 \end{bmatrix} \right\} \\ &= \exp \left[ -2\pi^2 f_1^2 \sigma_1^2 - 2\pi^2 f_2^2 \sigma_2^2 - 4\pi^2 f_1 f_2 E[X_1 X_2] \right]. \end{aligned}$$

En dérivant cette dernière expression par rapport à  $E[X_1 X_2]$ , on obtient

$$\frac{\partial \exp \left[ -2\pi^2 f_1^2 \sigma_1^2 - 2\pi^2 f_2^2 \sigma_2^2 - 4\pi^2 f_1 f_2 E[X_1 X_2] \right]}{\partial E(X_1 X_2)} = -4\pi^2 f_1 f_2 \exp \left[ -2\pi^2 f_1^2 \sigma_1^2 - 2\pi^2 f_2^2 \sigma_2^2 - 4\pi^2 f_1 f_2 E[X_1 X_2] \right]$$

d'où

$$\begin{aligned}\frac{\partial E(Y_1 Y_2)}{\partial E(X_1 X_2)} &= - \int \int 4\pi^2 f_1 f_2 G(f_1) G(f_2) \exp[-2\pi^2 f_1^2 \sigma_1^2 - 2\pi^2 f_2^2 \sigma_2^2 - 4\pi^2 f_1 f_2 E[X_1 X_2]] df_1 df_2 \\ &= - \int \int 4\pi^2 f_1 f_2 G(f_1) G(f_2) \phi(2\pi f_1, 2\pi f_2) df_1 df_2.\end{aligned}$$

Par ailleurs

$$E\left(\frac{\partial Y_1}{\partial X_1} \frac{\partial Y_2}{\partial X_2}\right) = \int \int \frac{\partial Y_1}{\partial X_1} \frac{\partial Y_2}{\partial X_2} p(\mathbf{x}) dx_1 dx_2.$$

Utilisant le fait que  $\text{TF}\left[\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\right] = j2\pi f_1 G_1(f_1)$  et que  $\text{TF}\left[\frac{\partial y_2}{\partial x_2}\right] = j2\pi f_2 G_2(f_2)$ , on obtient

$$\begin{aligned}E\left(\frac{\partial Y_1}{\partial X_1} \frac{\partial Y_2}{\partial X_2}\right) &= \int \int \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \frac{\partial y_2}{\partial x_2} p(\mathbf{x}) dx_1 dx_2 \\ &= \int \int \left[ \int (j2\pi f_1) G(f_1) e^{j2\pi f_1 x_1} df_1 \right] \left[ \int (j2\pi f_2) G(f_2) e^{j2\pi f_2 x_2} df_2 \right] p(\mathbf{x}) dx_1 dx_2 \\ &= \int \int (j2\pi f_1) G(f_1) (j2\pi f_2) G(f_2) \left[ \int \int e^{j2\pi(f_1 x_1 + f_2 x_2)} p(\mathbf{x}) dx_1 dx_2 \right] df_1 df_2 \\ &= \int \int (j2\pi f_1) G(f_1) (j2\pi f_2) G(f_2) \phi(2\pi f_1, 2\pi f_2) df_1 df_2,\end{aligned}$$

d'où le résultat final

$$\frac{\partial E(Y_1 Y_2)}{\partial E(X_1 X_2)} = E\left[\frac{\partial Y_1}{\partial X_1} \frac{\partial Y_2}{\partial X_2}\right].$$

Avec un raisonnement similaire, on montrerait que

$$\frac{\partial^{(k)} E(Y_1 Y_2)}{\partial E(X_1 X_2)^{(k)}} = E\left[\frac{\partial^{(k)} Y_1}{\partial X_1^{(k)}} \frac{\partial^{(k)} Y_2}{\partial X_2^{(k)}}\right],$$

où  $^{(k)}$  désigne la dérivée kème.

## References

- [1] M. B. Priestley, *Spectral Analysis and Time Series*. New-York, USA: Academic Press, 1981.
- [2] A. Papoulis and S. U. Pillai, *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*, 4th ed. Boston, USA: McGraw-Hill, 2002.
- [3] A. M. Yaglom, *An Introduction to the Theory of Stationary Random Functions*. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice Hall, 1962.
- [4] B. Picinbono, *Random Signals and Systems*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1993.
- [5] A. Zaknich, *Principles of Adaptive Filters and Self-Learning Systems*. London: Springer, 2005.
- [6] B. Solaiman, *Processus stochastiques pour l'ingénieur*. Lausanne, Switzerland: Presses polytechniques et universitaires romandes, 2006.