



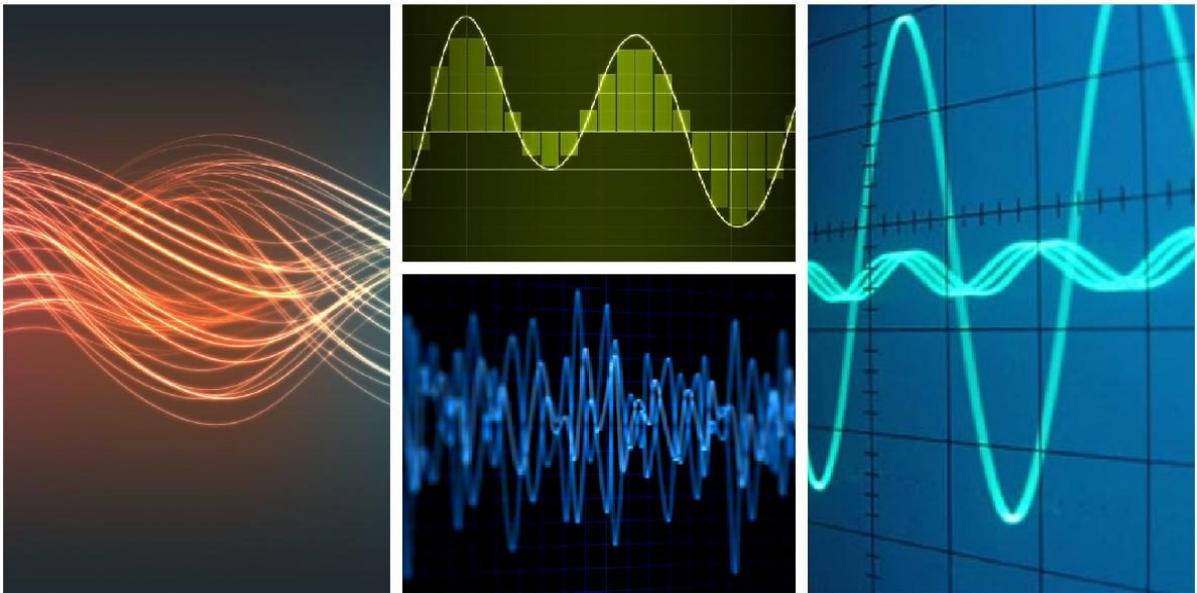
Département Sciences du Numérique

1SN

Traitement du Signal

Partie I : Signaux et systèmes à temps continu

Auteurs : J.-Y. Tourneret, C. Poulliat



Version 1.0 du
December 27, 2021

Contents

1	Mathématiques pour le signal	3
1.1	Espaces fonctionnels d'intérêt	3
1.2	Produit de convolution	3
1.2.1	Définition	3
1.2.2	Propriétés	4
1.3	Transformée de Fourier	4
1.3.1	Définitions	4
1.3.2	Propriétés	4
1.4	Fonctions spéciales	5
1.4.1	Impulsion et train de Dirac	5
1.4.2	Fonction indicatrice et opérateur de restriction	6
1.4.3	Fonction de Heaviside - Echelon unité	6
1.4.4	Fonction Porte	7
1.5	Formulaire et Tables des principales transformées de Fourier	8
2	Signaux déterministes et aléatoires	9
2.1	Signaux déterministes à énergie finie	9
2.1.1	Signaux déterministes périodiques à puissance finie	10
2.1.2	Signaux déterministes non périodiques à puissance finie	11
2.2	Signaux aléatoires stationnaires	12
2.2.1	Définition	12
2.2.2	Liens entre densité spectrale et transformée de Fourier	13
2.2.3	Exemples	13
2.2.4	Propriétés de $R_x(\tau)$ et $s_x(f)$ pour un signal aléatoire stationnaire	14
2.3	Ergodicité	15
2.3.1	Généralités	15
2.3.2	Exemples	16
2.3.3	Théorème	17
2.3.4	Résultats intéressants	19
3	Systèmes à temps continu - Filtrage linéaire invariant dans le temps	20
3.1	Systèmes à temps continu: définitions et propriétés	20
3.2	Filtrage des signaux déterministes	21
3.2.1	Réponse impulsionnelle, convolution et notion de filtre	21
3.2.2	Condition nécessaire et suffisante de stabilité des FLID	22
3.2.3	Caractérisation d'un filtre	22
3.2.4	Relations entrée-sortie de Wiener-Lee	23
3.2.5	Formules des interférences et intercorrélation entrée-sortie	24
3.3	Filtrage des signaux aléatoires	25
3.4	Identification d'une opération de filtrage linéaire	25
3.4.1	Définition	25
3.4.2	Exemples	26
3.5	Relations de Wiener-Lee	26
3.6	Filtrage adapté	28
3.6.1	Définition	28
3.6.2	Expression du filtre	28
3.6.3	SNR maximum	29
3.6.4	Applications	29
3.7	Filtrage de Wiener	29
3.7.1	Définition	29

3.7.2	Expression du filtre	29
3.7.3	Expression du filtre	30
3.7.4	Applications	32
4	Traitements non-linéaires	33
4.1	Cas des signaux déterministes - exemple du quadrateur	33
4.1.1	Propriété générale	33
4.1.2	Signal sinusoidal	33
4.1.3	Signal sinus cardinal	34
4.1.4	Exercice	34
4.2	Cas des signaux aléatoires	34
4.2.1	Théorème de Price	34
4.2.2	Exemple d'application : le quadrateur	35
4.2.3	Autre exemple d'application : théorème de Van Vleck	35
4.3	Quantification	36
5	Annexes	38
5.1	Preuve du théorème de Price	38

1 Mathématiques pour le signal

Dans cette section on expose les principales définitions et outils mathématiques nécessaires au traitement du signal. Une grande partie des définitions présentées ici seront détaillées dans le cours Fourier et Intégration de 1SN.

1.1 Espaces fonctionnels d'intérêt

Dans le cas déterministe, on s'intéressera ici à des signaux $x(t), t \in \mathbb{R}$, qui sont des fonctions dites à temps continu et à valeur dans \mathbb{R} ou plus généralement \mathbb{C} . Muni des opérations usuelles d'addition et de multiplication par un scalaire, cet ensemble de fonctions définit un espace vectoriel noté

$$\mathbb{C}^{\mathbb{R}} = \{x \mid x(t) \in \mathbb{C}, t \in \mathbb{R}\}.$$

Parmi les sous-espaces vectoriels d'intérêt, on aura l'espace vectoriel normé $\mathcal{L}_2(\mathbb{R})$ qui est l'espace des fonctions de carré intégrable qui correspondra aux signaux à énergie finie. On le notera

$$\mathcal{L}_2(\mathbb{R}) \triangleq \left\{ x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \mid \int |x(t)|^2 dt < \infty \right\}.$$

Le produit scalaire associé est donné par

$$\langle x, y \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t)dt,$$

où $*$ représente l'opérateur de conjugaison complexe, et la norme standard induite est donnée par

$$\|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

D'autres espaces vectoriels normés pourront être d'intérêt, comme par exemple l'espace des fonctions bornées associé à la norme infinie

$$\mathcal{L}_{\infty}(\mathbb{R}) \triangleq \left\{ x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \mid \sup_t |x(t)| < \infty \right\}.$$

En particulier, appartient à cet espace toutes les fonctions $x(t)$ telles que pour M fini, on vérifie $|x(t)| \leq M, \forall t \in \mathbb{R}$. On aura encore l'espace des fonctions absolument intégrables donné par

$$\mathcal{L}_1(\mathbb{R}) \triangleq \left\{ x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \mid \int_{\mathbb{R}} |x(t)| dt < \infty \right\}.$$

De manière similaire, pour des signaux périodiques de périodes T , i.e., tels que $x(t+T) = x(t), t \in \mathbb{R}$, on définira l'espace $\mathcal{L}_1\left(\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)\right)$ tel que $\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)| dt < \infty$, et l'espace $\mathcal{L}_2\left(\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)\right)$, tel que $\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt < \infty$.

1.2 Produit de convolution

1.2.1 Définition

Le produit de convolution est défini (quand il existe) par

$$y(t) = (h * x)(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau)h(\tau)d\tau \quad (1)$$

1.2.2 Propriétés

- **Commutativité :**

$$h * x = x * h$$

- **Associativité :**

$$g * (h * x) = g * h * x = (g * h) * x$$

- **Lien avec le produit scalaire:**

$$(h * x)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau = \langle x(\tau), h^*(t - \tau) \rangle_{\tau}$$

- **Autocorrélation déterministe :**

On définira plus tard l'autocorrélation déterministe comme

$$R_x(\tau) = \int_{\mathbb{R}} x(t)x^*(t - \tau)dt.$$

On peut alors montrer que

$$R_x(\tau) = \langle x(t), x(t - \tau) \rangle = x(\tau) * x^*(-\tau).$$

1.3 Transformée de Fourier

On rappelle ici les principales propriétés associées à la représentation fréquentielle des signaux. Voir cours Fourier et Intégration pour plus de détails quant aux dérivations et démonstrations.

1.3.1 Définitions

Définie pour des fonctions appartenant à $\mathcal{L}_2(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{L}_1(\mathbb{R})$, la transformée de Fourier de $x(t)$ est donnée par

$$X(f) = \text{TF}[x(t)] = \int_{\mathbb{R}} x(t) \exp(-j2\pi ft)dt \quad (2)$$

La transformée inverse est elle donnée par

$$x(t) = \text{TF}^{-1}[X(f)] = \int_{\mathbb{R}} X(f) \exp(+j2\pi ft)df \quad (3)$$

1.3.2 Propriétés

Les principales propriétés sont :

- **Linéarité :**

$$\text{TF}[ax(t) + by(t)] = aX(f) + bY(f)$$

- **Parité :**

$$x(t) \text{ réelle paire} \Rightarrow X(f) \text{ réelle paire}$$

- **Translation et Modulation :**

$$\begin{aligned} \text{TF}[x(t - t_0)] &= \exp(-j2\pi ft_0) X(f) \\ \text{TF}[x(t) \exp(j2\pi f_0 t)] &= X(f - f_0) \end{aligned}$$

Ces propriétés sont beaucoup utilisées en télécommunications.

- **Similitude :**

$$\text{TF}[x(at)] = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right)$$

- **Produits de Convolution :**

$$\begin{aligned}\text{TF}[x(t) * y(t)] &= X(f)Y(f) \\ \text{TF}[x(t)y(t)] &= X(f) * Y(f)\end{aligned}$$

- **Égalité de Parseval :**

$$\int_{\mathbb{R}} x(t)y^*(t)dt = \int_{\mathbb{R}} X(f)Y^*(f)df$$

En particulier, pour les signaux pour lesquels cela a du sens, on a la relation suivante de conservation de l'énergie entre les domaines temporel et fréquentiel souvent utilisée pour les calculs.

$$\int_{\mathbb{R}} |x(t)|^2 dt = \int_{\mathbb{R}} |X(f)|^2 df$$

- **Conjugaison :**

$$\text{TF}[x^*(t)] = X^*(-f)$$

1.4 Fonctions spéciales

1.4.1 Impulsion et train de Dirac

Impulsion de Dirac

L'impulsion de Dirac, souvent dénommée abusivement fonction de Dirac, n'est pas une fonction mais une distribution (voir Cours Fourier et Intégration), encore appelée fonction généralisée. Pour toute fonction continue $x(t)$ en 0, l'impulsion de Dirac est définie par

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t)dt = x(0). \quad (4)$$

Par conséquence de cette définition, on a

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1. \quad (5)$$

De même, on peut montrer que pour $x(t)$ continue en t_0 on a

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - t_0) dt = x(t_0). \quad (6)$$

L'impulsion de Dirac est un opérateur fondamental en théorie du signal car il permet la formalisation de l'opération d'échantillonnage, et à ce titre est souvent appelé opérateur d'échantillonnage. Formellement, on obtient les relations suivantes qui font référence à une propriété dite de localisation

$$x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t) \quad (7)$$

$$x(t)\delta(t - t_0) = x(t_0)\delta(t - t_0) \quad (8)$$

De la même manière, via la convolution, l'impulsion de Dirac est l'opérateur de décalage temporel. Ainsi, on a la relation suivante

$$x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0). \quad (9)$$

En particulier, $\delta(t)$ est l'élément neutre de la convolution, ie.

$$x(t) * \delta(t) = x(t). \quad (10)$$

L'impulsion de Dirac admet également une transformée de Fourier au sens des distributions. On a alors les deux transformées de Fourier suivantes

$$\text{TF}[\delta(t)] = 1, \quad \text{TF}[1] = \delta(f),$$

et en appliquant les propriétés de décalage, on obtient

$$\text{TF}[\delta(t - t_0)] = \exp(-j2\pi f t_0), \quad \text{TF}[\exp(j2\pi f_0 t)] = \delta(f - f_0).$$

Train de Dirac

Par définition, un train de Dirac (appelé aussi peigne de Diracs) est une séquence infinie d'impulsions de Dirac défini comme suit

$$\mathbb{I}_T(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(t - kT).$$

Sa transformée de Fourier au sens des distributions est donnée par

$$\text{TF}[\mathbb{I}_T(t)] = \frac{1}{T} \mathbb{I}_{1/T}(f).$$

C'est un opérateur central en théorie du signal quand on parle d'échantillonnage. En effet, vous verrez dans la suite du cours qu'un signal numérique se modélise à partir de la version échantillonnée à la période T du signal analogique $x_a(t)$ (notée $x_e(t)$) à l'aide de cet opérateur. On aura en particulier la relation suivante

$$x_e(t) = x_a(t) \cdot \mathbb{I}_T(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_a(kT) \delta(t - kT).$$

De cette relation simple, dans la deuxième partie du cours, on pourra alors déterminer à quelle(s) condition(s) on peut représenter un signal continu à l'aide des échantillons numériques $\{x[n] = x_a(nT)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ sans perte d'information (ou de manière équivalente sans "distorsion"). De même, on pourra lier les propriétés spectrales de $x_e(t)$ avec celles de $x_a(t)$ et de la séquence $\{x[n]\}_{n \in \mathbb{Z}}$.

1.4.2 Fonction indicatrice et opérateur de restriction

Pour tout interval $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$, on définit la fonction indicatrice

$$\mathbb{1}_{\mathcal{I}}(t) = \begin{cases} 1, & \text{pour } t \in \mathcal{I} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \quad (11)$$

De la même façon, on peut définir l'opérateur $\mathbb{1}_{\mathcal{I}}$ tel que

$$y = \mathbb{1}_{\mathcal{I}} x$$

avec

$$y(t) = \begin{cases} x(t), & \text{pour } t \in \mathcal{I} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \quad (12)$$

1.4.3 Fonction de Heaviside - Echelon unité

La fonction de Heaviside, encore appelée *échelon unité*, est définie par

$$u(t) = \begin{cases} 1, & \text{pour } t \geq 0; \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}. \quad (13)$$

Cette fonction appartient aux espaces fonctionnels $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$, mais pas à $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, ni à $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$.

La restriction d'un signal $x(t)$ défini sur la droite réelle peut être définie facilement à l'aide de la fonction de Heaviside et est souvent utilisée pour l'analyse fréquentielle des signaux. Par exemple, on peut définir la restriction $x_+ = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+} x$ de $x(t)$ aux valeurs temporelles positives qui peut s'écrire

$$x_+(t) = \begin{cases} x(t), & \text{pour } t \geq 0 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} = u(t)x(t).$$

Exercice : Montrer que la restriction de $x(t)$ à un support $[t_0, t_1)$ peut s'écrire

$$x_{[t_0, t_1)}(t) = \begin{cases} x(t), & \text{pour } t \in [t_0, t_1) \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} = (u(t - t_0) - u(t - t_1))x(t)$$

1.4.4 Fonction Porte

La fonction porte est une fonction très souvent rencontrée en théorie du signal, car elle permet de traduire que l'on a souvent qu'un enregistrement des signaux sur une durée finie (notée T). Cette fonction porte est définie par

$$\Pi_T(t) = \begin{cases} 1, & \text{pour } |t| \leq \frac{T}{2} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \quad (14)$$

Exercice : Exprimer la fonction porte en fonction de la fonction échelon

1.5 Formulaire et Tables des principales transformées de Fourier

Propriétés générales

T.F.

$ax(t) + by(t)$	\Leftrightarrow	$aX(f) + bY(f)$
$x(t - t_0)$	\Leftrightarrow	$X(f)e^{-i2\pi ft_0}$
$x(t)e^{+i2\pi f_0 t}$	\Leftrightarrow	$X(f - f_0)$
$x^*(t)$	\Leftrightarrow	$X^*(-f)$
$x(t) \cdot y(t)$	\Leftrightarrow	$X(f) * Y(f)$
$x(t) * y(t)$	\Leftrightarrow	$X(f) \cdot Y(f)$
$x(at + b)$	\Leftrightarrow	$\frac{1}{ a } X\left(\frac{f}{a}\right) e^{i2\pi \frac{b}{a} f}$
$\frac{dx^{(n)}(t)}{dt^n}$	\Leftrightarrow	$(i2\pi f)^n X(f)$
$(-i2\pi t)^n x(t)$	\Leftrightarrow	$\frac{dX^{(n)}(f)}{df^n}$

Formule de Parseval	Série de Fourier
$\int_{\mathbb{R}} x(t)y^*(t)dt = \int_{\mathbb{R}} X(f)Y^*(f)df$	$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{+i2\pi n f_0 t} \Leftrightarrow \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \delta(f - n f_0)$
$\int_{\mathbb{R}} x(t) ^2 dt = \int_{\mathbb{R}} X(f) ^2 df$	

Table de Transformées de Fourier

T.F.

1	\Leftrightarrow	$\delta(f)$
$\delta(t)$	\Leftrightarrow	1
$e^{+i2\pi f_0 t}$	\Leftrightarrow	$\delta(f - f_0)$
$\delta(t - t_0)$	\Leftrightarrow	$e^{-i2\pi f t_0}$
$\text{III}_T(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(t - kT)$	\Leftrightarrow	$\frac{1}{T} \text{III}_{1/T}(f)$
$\cos(2\pi f_0 t)$	\Leftrightarrow	$\frac{1}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$
$\sin(2\pi f_0 t)$	\Leftrightarrow	$\frac{1}{2i} [\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)]$
$e^{-a t }$	\Leftrightarrow	$\frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 f^2}$
$e^{-\pi t^2}$	\Leftrightarrow	$e^{-\pi f^2}$
$\Pi_T(t)$	\Leftrightarrow	$T \frac{\sin(\pi T f)}{\pi T f} = T \text{sin } c(\pi T f)$
$\Lambda_T(t)$	\Leftrightarrow	$T \text{sin } c^2(\pi T f)$
$B \text{sin } c(\pi B t)$	\Leftrightarrow	$\Pi_B(f)$
$B \text{sin } c^2(\pi B t)$	\Leftrightarrow	$\Lambda_B(f)$

!!!!!! Attention !!!!!

$\Pi_T(t)$ note une fenêtre rectangulaire de support égal à T .

$\Lambda_T(t)$ note une fenêtre triangulaire de support égal à $2T$ (de demi-base égale à T).

$$\Pi_T(t) * \Pi_T(t) = T \Lambda_T(t)$$

2 Signaux déterministes et aléatoires

On s'intéresse dans cette partie à décrire différentes classes de signaux à temps continu notés par exemple $x(t)$, $y(t)$... qui représentent l'évolution d'une mesure au cours du temps, par exemple l'évolution de la température prise en un point donné au cours du temps. On a l'habitude de regrouper ces signaux en différentes classes pour lesquelles la notion de spectre diffère légèrement. Tout d'abord, on distingue les signaux **déterministes** des signaux **aléatoires**, les premiers prenant à un instant donné la même valeur pour différentes réalisations (comme $x(t) = \cos(2t + 3)$), les autres étant définis à l'aide de variables aléatoires pour modéliser le fait que ces signaux diffèrent d'une réalisation à une autre (comme $x(t) = \cos(2t + \phi)$, avec ϕ variable aléatoire uniforme sur l'intervalle $]0, 2\pi[$).

2.1 Signaux déterministes à énergie finie

On dit qu'un signal à temps continu $x(t)$ est à énergie finie si

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt < \infty. \quad (15)$$

Pour un signal à énergie finie $x(t)$, on peut définir sa fonction d'autocorrélation $R_x(\tau)$ et sa densité spectrale d'énergie comme suit

$$\text{Fonction d'autocorrélation : } R_x(\tau) = \int_{\mathbb{R}} x(t)x^*(t - \tau) dt \quad (16)$$

et

$$\text{Densité spectrale d'énergie : } s_x(f) = \text{TF}[R_x(\tau)] = \int_{\mathbb{R}} R_x(\tau) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau \quad (17)$$

où $x^*(t)$ désigne le complexe conjugué du signal $x(t)$. On notera que $R_x(\tau)$ est le produit scalaire entre les deux signaux $x(t)$ et $x(t - \tau)$, i.e., $R_x(\tau) = \langle x(t), x(t - \tau) \rangle$ si on définit

$$\langle u(t), v(t) \rangle = \int_{\mathbb{R}} u(t)v^*(t) dt$$

qui est le produit scalaire des signaux à énergie finie. La fonction d'intercorrélation entre deux signaux à énergie finie $x(t)$ et $y(t)$ est alors définie par le produit scalaire entre $x(t)$ et $y(t - \tau)$, i.e.,

$$\text{Fonction d'intercorrélation : } R_{xy}(\tau) = \langle x(t), y(t - \tau) \rangle = \int_{\mathbb{R}} x(t)y^*(t - \tau) dt$$

et on remarquera que $E = R_x(0) = \langle x(t), x(t) \rangle$.

La densité spectrale d'énergie $s_x(f)$ est liée à la transformée de Fourier du signal $x(t)$ notée $X(f)$ par une relation simple

$$s_x(f) = |X(f)|^2 \quad (18)$$

En effet

$$\begin{aligned} s_x(f) &= \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} x(t)x^*(t - \tau) dt \right] \exp(-j2\pi f\tau) d\tau \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} x^*(t - \tau) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau \right] x(t) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} x^*(u) \exp[j2\pi f(u - t)] du \right] x(t) dt \\ &= X^*(f)X(f) = |X(f)|^2 \end{aligned}$$

qui montre qu'une densité spectrale est toujours positive et qu'elle est homogène au module carré d'une transformée de Fourier. Tous les signaux déterministes à amplitude bornée dont le support est un intervalle ou une réunion d'intervalles sont à énergie finie. Un exemple classique est la fenêtre rectangulaire de largeur T notée $\Pi_T(t)$ définie par

$$x(t) = \Pi_T(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

qui admet la fonction d'autocorrélation

$$R_x(\tau) = T\Lambda_T(\tau) = \begin{cases} T & \text{si } -T < \tau < T \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et la densité spectrale d'énergie

$$s_x(f) = T^2 \text{sinc}^2(\pi T f) = |X(f)|^2.$$

2.1.1 Signaux déterministes périodiques à puissance finie

On dit qu'un signal à temps continu $x(t)$ est à puissance finie périodique de période T_0 si $x(t + T_0) = x(t)$, $\forall t$ (périodicité de période T_0) et si

$$P = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} |x(t)|^2 dt < \infty \quad (19)$$

Par ailleurs, si $x(t)$ est à puissance finie périodique, alors son énergie est infinie. On peut définir un produit scalaire pour les signaux périodiques à puissance finie comme suit

$$\langle u(t), v(t) \rangle = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} u(t)v^*(t) dt.$$

Il est donc assez naturel de définir les fonctions d'autocorrélation et d'intercorrélation et la densité spectrale de puissance d'un signal périodique à puissance finie comme suit

$$\textbf{Fonction d'autocorrélation} : R_x(\tau) = \langle x(t), x(t - \tau) \rangle = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)x^*(t - \tau) dt \quad (20)$$

$$\textbf{Fonction d'intercorrélation} : R_{xy}(\tau) = \langle x(t), y(t - \tau) \rangle = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)y^*(t - \tau) dt$$

et

$$\textbf{Densité spectrale de puissance} : s_x(f) = \text{TF}[R_x(\tau)] = \int_{\mathbb{R}} R_x(\tau) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau. \quad (21)$$

La densité spectrale de puissance d'un signal déterministe périodique à puissance finie de période T_0 est liée à sa décomposition en série de Fourier par la relation simple

$$s_x(f) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 \delta(f - kf_0) \quad (22)$$

où les coefficients c_k apparaissent dans la décomposition en série de Fourier de $x(t)$

$$x(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \exp(j2\pi k f_0 t).$$

La relation (22) montre que la densité spectrale de puissance d'un signal déterministe périodique à puissance finie est un spectre de raies avec des amplitudes positives qui sont les modules carrés des coefficients c_k . Elle se démontre comme suit

$$\begin{aligned} R_x(\tau) &= \sum_{k,l} c_k c_l^* \exp(j2\pi l f_0 \tau) \left[\frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \exp[j2\pi(k-l)f_0 t] dt \right] \\ &= \sum_k |c_k|^2 \exp(j2\pi k f_0 \tau) \end{aligned}$$

et donc

$$s_x(f) = \text{TF}[R_x(\tau)] = \sum_k |c_k|^2 \text{TF}[\exp(j2\pi k f_0 \tau)] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 \delta(f - k f_0).$$

Un exemple classique appelé parfois le **secteur** est le signal défini par

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t)$$

avec $A = 220\sqrt{2}$ et $f_0 = 50$ Hz qui est un signal périodique de période $T_0 = \frac{1}{f_0}$. Ce signal admet comme fonction d'autocorrélation

$$R_x(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f_0 \tau)$$

qui est une fonction périodique de même période que $x(t)$ et qui admet la densité spectrale de puissance

$$s_x(f) = \frac{A^2}{4} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)].$$

2.1.2 Signaux déterministes non périodiques à puissance finie

La dernière classe de signaux déterministes que vous avez étudiée l'année dernière est la classe des signaux déterministes non périodiques à puissance finie qui vérifient

$$P = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt < \infty. \quad (23)$$

On remarquera que si $x(t)$ est à énergie finie, alors sa puissance est nulle. Ces signaux admettent le produit scalaire

$$\langle u(t), v(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(t)v^*(t) dt$$

ce qui induit les définitions suivantes

$$\text{Fonction d'autocorrélation : } R_x(\tau) = \langle x(t), x(t - \tau) \rangle = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)x^*(t - \tau) dt, \quad (24)$$

$$\text{Fonction d'intercorrélacion : } R_{xy}(\tau) = \langle x(t), y(t - \tau) \rangle = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)y^*(t - \tau) dt$$

et

$$\text{Densité spectrale de puissance : } s_x(f) = \text{TF}[R_x(\tau)] = \int_{\mathbb{R}} R_x(\tau) \exp(-j2\pi f \tau) d\tau. \quad (25)$$

On peut montrer la relation suivante

$$s_x(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |X_T(f)|^2$$

avec

$$X_T(f) = \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \exp(-j2\pi ft) dt$$

qui montre que la densité spectrale de puissance d'un signal déterministe non périodique à puissance finie est toujours positive et est homogène au module carré d'une transformée de Fourier. Un exemple classique de signal déterministe non périodique à puissance finie est le signal constant

$$x(t) = A, \forall t \in \mathbb{R}$$

avec $A \in \mathbb{R}$. Ce signal est de puissance

$$P = A^2$$

de fonction d'autocorrélation

$$R_x(\tau) = A^2$$

et de densité spectrale de puissance

$$s_x(f) = A^2 \delta(f).$$

2.2 Signaux aléatoires stationnaires

2.2.1 Définition

Une classe de signaux très utile pour les applications pratiques regroupe les signaux **aléatoires stationnaires au sens large** (appelés aussi **stationnaires à l'ordre 2**) (que nous appellerons par simplicité **signaux stationnaires**) vérifiant

$$\boxed{E[x(t)] = m \quad (\text{moyenne indépendante du temps})} \quad (26)$$

et

$$\boxed{E[x(t)x^*(t-\tau)] = R_x(\tau) \quad (\text{quantité indépendante du temps}).} \quad (27)$$

La première propriété indique que la moyenne probabiliste du signal $x(t)$ à un instant donné t ne dépend pas de cet instant t et est donc égale à une constante notée m , ce qui fait penser à un régime permanent ou à une sorte de stationnarité appelée stationnarité à l'ordre 1. La seconde propriété indique que le lien entre $x(t)$ et $x(t-\tau)$ (défini par $E[x(t)x^*(t-\tau)]$, ce qui sera expliqué plus tard) ne dépend que de τ , qui est la largeur de l'intervalle $]t-\tau, t[$ ou $]t, t-\tau[$ (suivant le signe de τ). On supposera que m et $R_x(\tau)$ sont des quantités bien définies, ce qui est le cas pour les signaux vérifiant

$$\boxed{P = E[|x(t)|^2] < \infty} \quad (28)$$

appelés **signaux aléatoires à puissance moyenne finie**. Cette classe de signaux admet un produit scalaire

$$\langle u(t), v(t) \rangle = E[u(t)v^*(t)]$$

qui induit les définitions suivantes

$$\boxed{\text{Fonction d'autocorrélation : } R_x(\tau) = \langle x(t), x(t-\tau) \rangle = E[x(t)x^*(t-\tau)],} \quad (29)$$

$$\text{Fonction d'intercorrélation : } R_{xy}(\tau) = \langle x(t), y(t-\tau) \rangle = E[x(t)y^*(t-\tau)]$$

et

$$\boxed{\text{Densité spectrale de puissance : } s_x(f) = \text{TF}[R_x(\tau)] = \int_{\mathbb{R}} R_x(\tau) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau.} \quad (30)$$

Le spectre des signaux aléatoires stationnaires est donc naturellement défini par cette densité spectrale de puissance $s_x(f) = \text{TF}[R_x(\tau)]$ avec $R_x(\tau) = \langle x(t), x(t-\tau) \rangle = E[x(t)x^*(t-\tau)]$.

2.2.2 Liens entre densité spectrale et transformée de Fourier

Nous avons vu que pour un **signal à énergie finie**, on a

$$s_x(f) = |X(f)|^2$$

où $X(f) = \text{TF}[x(t)] = \int_{\mathbb{R}} x(t) \exp(-j2\pi ft) dt$ est la transformée de Fourier du signal $x(t)$ (qui existe pour tout signal à énergie finie). La densité spectrale d'énergie est donc homogène au module carré d'une transformée de Fourier.

Pour les signaux **périodiques à puissance finie**, on a

$$s_x(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2 \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

où les coefficients c_k sont obtenus par décomposition en série de Fourier du signal périodique $x(t)$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \exp(-j2k\pi ft).$$

Comme

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \delta\left(f - \frac{k}{T}\right),$$

on observe que les coefficients des raies spectrales de la densité spectrale de puissance d'un signal périodique sont homogènes aux modules des carrés des coefficients de sa transformée de Fourier.

Pour les signaux **aléatoires stationnaires**, on admettra que

$$s_x(f) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} E [|X_T(f)|^2]$$

avec

$$X_T(f) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \exp(-j2\pi ft) dt,$$

ce qui indique que $s_x(f)$ est une quantité positive homogène au module carré d'une transformée de Fourier calculée sur une fenêtre $]-\frac{T}{2}, +\frac{T}{2}[$. **Mais on montrerait que la transformée de Fourier d'un signal aléatoire stationnaire n'est pas définie !!**

2.2.3 Exemples

- **Exemple 1 : Sinusoïde**

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \theta)$$

θ variable aléatoire uniforme sur $[0, 2\pi]$.

- **Fonction d'autocorrélation**

$$R_x(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f_0 \tau)$$

- **Densité spectrale de puissance**

$$s_x(f) = \frac{A^2}{4} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$$

- **Exemple 2 : bruit blanc**

- **Fonction d'autocorrélation**

$$R_x(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau)$$

- **Densité spectrale de puissance**

$$s_x(f) = \frac{N_0}{2}$$

2.2.4 Propriétés de $R_x(\tau)$ et $s_x(f)$ pour un signal aléatoire stationnaire

1. Fonction d'autocorrélation

- **Symétrie hermitienne**

$$\boxed{R_x^*(-\tau) = R_x(\tau)}. \quad (31)$$

La démonstration ci-dessous est faite pour des signaux aléatoires mais se généralise aux autres classes très facilement

$$R_x^*(-\tau) = \text{conjugué de } E[x(t)x^*(t+\tau)] = E[x^*(t)x(t+\tau)] = E[x(t+\tau)x^*(t)] = R_x(\tau).$$

- **Valeur maximale à l'origine**

$$\boxed{|R_x(\tau)| \leq R_x(0)} \quad (32)$$

La preuve utilise l'inégalité de Cauchy Schwartz définie par

$$\langle x(t), y(t) \rangle^2 \leq \|x(t)\|^2 \|y(t)\|^2.$$

En utilisant cette inégalité, on obtient

$$R_x^2(\tau) = \langle x(t), x(t-\tau) \rangle^2 \leq \|x(t)\|^2 \|x(t-\tau)\|^2 = \langle x(t), x(t) \rangle \langle x(t-\tau), x(t-\tau) \rangle = R_x^2(0).$$

- **Distance entre $x(t)$ et $x(t-\tau)$**

$$\begin{aligned} d^2[x(t), x(t-\tau)] &= \|x(t) - x(t-\tau)\|^2 \\ &= \langle x(t) - x(t-\tau), x(t) - x(t-\tau) \rangle \\ &= R_x(0) - R_x(\tau) - R_x(-\tau) + R_x(0) \\ &= 2[R_x(0) - \text{Re}\{R_x(\tau)\}]. \end{aligned} \quad (33)$$

Pour un signal réel, on a $\text{Re}\{R_x(\tau)\} = R_x(\tau)$ donc

$$d^2[x(t), x(t-\tau)] = 2[R_x(0) - R_x(\tau)]. \quad (34)$$

Donc plus $R_x(\tau)$ est grand, plus la distance entre $x(t)$ et $x(t-\tau)$ est petite. On dit que $R_x(\tau)$ **mesure le lien entre $x(t)$ et $x(t-\tau)$** .

- $R_x(\tau) = R_1(\tau) + R_2(\tau)$, où $R_1(\tau)$ est une somme de fonctions périodiques et $R_2(\tau)$ est une fonction qui tend vers 0 lorsque $|\tau| \rightarrow \infty$. La partie $R_1(\tau)$ correspond à la fonction d'autocorrélation de la somme de fonctions périodiques tandis que $R_2(\tau)$ est la fonction d'autocorrélation d'un signal déterministe à énergie finie (pour plus de détails, voir [1, Section 4.9]).

2. Densité spectrale de puissance

- **Fonction réelle**

$$s_x(f) \in \mathbb{R}$$

car la transformée de Fourier d'une fonction hermitienne est réelle. De plus si $x(t)$ est un signal réel, alors $R_x(\tau)$ est une fonction réelle paire donc $s_x(f)$ est également **réelle paire** (la transformée de Fourier d'un signal réel pair est réelle paire).

- **Positivité**

$$s_x(f) \geq 0.$$

Ceci ne se voit pas directement sur la définition $s_x(f) = \text{TF}[R_x(\tau)]$ mais à partir des expressions équivalentes rappelées ci-dessous

- Signal déterministe à énergie finie

$$s_x(f) = |X(f)|^2$$

- Signal déterministe périodique à puissance finie

$$s_x(f) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 \delta(f - kf_0)$$

- Signal déterministe à puissance finie

$$s_x(f) = s_x(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |X_T(f)|^2$$

- Signal aléatoire

$$s_x(f) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} E [|X_T(f)|^2]$$

- Intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} s_x(f) df = R_x(0) = \text{Puissance}$$

- $s_x(f) = s_1(f) + s_2(f)$, où $s_1(f)$ est un **spectre de raies** et $s_2(f)$ est un **spectre continu** (décomposition de Lebesgue)

2.3 Ergodicité

2.3.1 Généralités

Lorsqu'on veut montrer qu'un signal aléatoire $X(t)$ est stationnaire (au sens large), il faut vérifier que $E[X(t)]$ et $E[X(t)X(t-\tau)]$ sont deux quantités indépendantes du temps, ce qui nécessite en pratique de calculer des moyennes statistiques à partir de plusieurs réalisations de $X(t)$ notées $X^{(i)}(t)$, $i = 1, \dots, N$ où N est le nombre de réalisations (appelées parfois trajectoires) de $X(t)$. Par exemple pour la moyenne, on peut déterminer la **moyenne statistique** de $X(t)$ définie par

$$m(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X^{(i)}(t)$$

avec un nombre de réalisations N suffisamment grand (pour que $m(t)$ soit une bonne approximation de $E[X(t)]$, en vertu de la loi des grands nombres) et vérifier que cette quantité ne fluctue pas trop et peut donc être considérée comme une constante. Mais cette approche nécessite d'avoir à notre disposition plusieurs réalisations de $X(t)$, ce qui peut être contraignant. Dans les applications pratiques, il est évidemment plus simple de déterminer la moyenne de $X(t)$ à l'aide d'une **moyenne temporelle**

$$\bar{X}_T = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T X(t_i)$$

à partir d'une seule réalisation de $X(t)$, où les instants t_i sont les instants d'échantillonnage de $X(t)$. La notion d'ergodicité (au premier ordre pour la moyenne, au second ordre pour la fonction d'autocorrélation, ...) précise dans quelles conditions on peut estimer la moyenne statistique de $X(t)$ à l'aide de sa moyenne temporelle \bar{X}_T .

On dit qu'un signal aléatoire à temps continu $X(t)$ est **ergodique au premier ordre** si

$$Y_T = \frac{1}{T} \int_0^T X(u) du \xrightarrow[T \rightarrow +\infty]{\text{mq}} E[X(t)]$$

c'est-à-dire si la moyenne temporelle Y_T converge vers la moyenne statistique $E[X(t)]$ (qui est indépendante de t pour un signal stationnaire et sera notée m). On notera que la limite dans l'équation précédente est calculée au sens de la convergence en moyenne quadratique, c'est-à-dire

$$Y_T \xrightarrow[T \rightarrow +\infty]{\text{mq}} E[X(t)] = m \Leftrightarrow \lim_{T \rightarrow \infty} E[(Y_T - m)^2] = 0.$$

On remarquera que si $X(t)$ est un signal ergodique au premier ordre, alors

$$E[X(t)] = \lim_{T \rightarrow \infty} Y_T$$

et comme cette limite (au sens de la convergence en moyenne quadratique) ne dépend pas de t , le signal $X(t)$ est nécessairement stationnaire au premier ordre. L'inverse est faux, comme nous le verrons sur certains exemples. La propriété d'ergodicité est donc plus forte que la stationnarité.

2.3.2 Exemples

- Le secteur

$$X(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \theta)$$

avec $A = 220\sqrt{2}$, $f_0 = 50\text{Hz}$ et θ uniformément répartie sur $]0, 2\pi[$. Nous savons que le signal $X(t)$ est de moyenne nulle $E[X(t)] = 0$ et de fonction d'autocorrélation $E[X(t)X(t - \tau)] = \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f_0 \tau)$. Le signal $X(t)$ est donc ergodique au premier ordre si

$$Y_T = \frac{1}{T} \int_0^T X(u) du \xrightarrow[T \rightarrow +\infty]{\text{mq}} 0.$$

Mais

$$\begin{aligned} Y_T &= \frac{1}{T} \int_0^T A \cos(2\pi f_0 u + \theta) du \\ &= \left[\frac{A \sin(2\pi f_0 u + \theta)}{2\pi f_0} \right]_{u=0}^{u=T} \\ &= \frac{A \sin(2\pi f_0 T + \theta) - A \sin(\theta)}{2\pi f_0 T}. \end{aligned} \tag{35}$$

donc

$$|Y_T| \leq \frac{A}{\pi f_0 T}$$

et par suite

$$E[(Y_T - m)^2] = E[Y_T^2] \leq \frac{A^2}{\pi^2 f_0^2 T^2} \xrightarrow[T \rightarrow +\infty]{} 0.$$

ce qui prouve que le signal $X(t)$ est **ergodique au premier ordre**.

- Le carré du secteur

$$\begin{aligned} X(t) &= A \cos^2(2\pi f_0 t + \theta) \\ &= A \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(4\pi f_0 t + 2\theta) \right] \end{aligned}$$

où θ est une variable aléatoire uniformément répartie sur $]0, 2\pi[$ et A une variable aléatoire de moyenne m_A et de variance $\sigma_A^2 > 0$ indépendante de θ . La moyenne de $X(t)$ est alors

$$E[X(t)] = m = \frac{m_A}{2}.$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned}
 Y_T &= \frac{A}{2T} \int_0^T [1 + \cos(4\pi f_0 u + 2\theta)] du \\
 &= \frac{A}{2} + \frac{A}{2T} \left[\frac{\sin(4\pi f_0 u + 2\theta)}{4\pi f_0} \right]_{u=0}^{u=T} \\
 &= \frac{A}{2} + \frac{A}{2T} \left[\frac{\sin(4\pi f_0 T + 2\theta) - \sin(2\theta)}{4\pi f_0} \right].
 \end{aligned} \tag{36}$$

donc

$$Y_T \xrightarrow[T \rightarrow +\infty]{\text{mq}} \frac{A}{2} \neq E[X(t)] = \frac{m_A}{2}.$$

ce qui prouve que le signal $X(t)$ **n'est pas ergodique au premier ordre.**

- Autres exemples de signaux non-ergodiques

- Amplitude aléatoire

$$X(t) = V$$

avec V variable aléatoire uniforme sur $]0, V_0[$ (avec par exemple $V_0 = 10$ volts).

- Modulation du secteur

$$Z(t) = X(t) \exp(-j2\pi f_0 t)$$

avec $X(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \theta)$ le secteur défini ci-dessus.

2.3.3 Théorème

Énoncé

Pour un processus aléatoire stationnaire au sens large $X(t)$ de moyenne $E[X(t)] = m$, de fonction d'autocorrélation $R_X(\tau) = E[X(t)X^*(t-\tau)]$ et de densité spectrale de puissance $s_X(f) = TF[R_X(\tau)]$, on a

$$\boxed{Y_T = \frac{1}{T} \int_0^T X(u) du \xrightarrow[T \rightarrow +\infty]{\text{mq}} m \Leftrightarrow \Delta S_X(0) = |m|^2} \tag{37}$$

avec $\Delta S_X(0) = S_X(0^+) - S_X(0^-)$ et $s_X(f) = \frac{dS_X(f)}{df}$.

Preuve

Comme

$$E[|Y_T - m|^2] = E[Y_T Y_T^*] - |m|^2$$

il suffit de montrer que

$$E[Y_T Y_T^*] = \Delta S_X(0).$$

Par utilisation de l'isométrie fondamentale $X(t) \leftrightarrow e^{j2\pi ft}$, on a

$$\begin{aligned}
 E[Y_T Y_T^*] &= \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{e^{j2\pi fT} - 1}{j2\pi fT} \right|^2 s_X(f) df \\
 &= \int_{-\infty}^{-\frac{1}{\sqrt{T}}} + \int_{-\frac{1}{\sqrt{T}}}^{\frac{1}{\sqrt{T}}} + \int_{\frac{1}{\sqrt{T}}}^{+\infty} \left| \frac{e^{j2\pi fT} - 1}{j2\pi fT} \right|^2 s_X(f) df \\
 &= I_1 + I_2 + I_3
 \end{aligned}$$

On exprime alors les trois intégrales comme suit

Intégrale I_3

$$\begin{aligned}
 I_3 &= \int_{\frac{1}{\sqrt{T}}}^{+\infty} \left| \frac{e^{j2\pi fT} - 1}{j2\pi fT} \right|^2 s_X(f) df \\
 &\leq \int_{\frac{1}{\sqrt{T}}}^{+\infty} \frac{4}{4\pi^2 f^2 T^2} s_X(f) df \\
 &\leq \frac{1}{\pi^2 T} \int_{\frac{1}{\sqrt{T}}}^{+\infty} s_X(f) df \leq \frac{R_X(0)}{\pi^2 T} \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} 0
 \end{aligned}$$

où $R_X(\tau)$ est la fonction d'autocorrélation du signal $X(t)$.

Intégrale I_1

Résultat similaire après changement de variables $u = -f$.

Intégrale I_2

$$I_2 = \int_{-\frac{1}{\sqrt{T}}}^{\frac{1}{\sqrt{T}}} \left| \frac{e^{j2\pi fT} - 1}{j2\pi fT} \right|^2 dS_X(f)$$

On pose

$$\tilde{S}_X(f) = \begin{cases} S_X(f) & f < 0 \\ S_X(f) - \Delta S_X(0) & f \geq 0 \end{cases}$$

Par construction, en notant $U(f)$ l'échelon de Heaviside, la fonction $\tilde{S}_X(f) = S_X(f) - \Delta S_X(0)U(f)$ est continue en $f = 0$. Alors :

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \int_{-\frac{1}{\sqrt{T}}}^{\frac{1}{\sqrt{T}}} \left| \frac{e^{j2\pi fT} - 1}{j2\pi fT} \right|^2 dS_X(f) \\
 &= \Delta S_X(0) + \int_{-\frac{1}{\sqrt{T}}}^{\frac{1}{\sqrt{T}}} \left| \frac{e^{j2\pi fT} - 1}{j2\pi fT} \right|^2 d\tilde{S}_X(f)
 \end{aligned}$$

Puisque pour $x > 0$, on a

$$\begin{aligned}
 \left| \int_0^x e^{iu} du \right| &\leq \int_0^x |e^{iu}| du = x \\
 |e^{ix} - 1| &\leq x,
 \end{aligned}$$

on en déduit

$$\begin{aligned}
 I_2 - \Delta S_X(0) &= \int_{-\frac{1}{\sqrt{T}}}^{\frac{1}{\sqrt{T}}} \left| \frac{e^{j2\pi fT} - 1}{j2\pi fT} \right|^2 d\tilde{S}_X(f) \\
 &\leq \int_{-\frac{1}{\sqrt{T}}}^{\frac{1}{\sqrt{T}}} d\tilde{S}_X(f) = \tilde{S}_X\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right) - \tilde{S}_X\left(-\frac{1}{\sqrt{T}}\right)
 \end{aligned}$$

Par continuité de $\tilde{S}_X(f)$ et par passage à la limite $T \rightarrow +\infty$, on en déduit $I_2 = \Delta S_X(0)$.

Utilisation

• Le secteur

Puisque $E[X(t)] = 0$, il suffit de vérifier que $\Delta S_X(0) = 0$, ce qui est immédiat. En effet, puisque $E[X(t)X(t-\tau)] = \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f_0\tau)$, la densité spectrale de puissance de $X(t)$ est

$$s_X(f) = \frac{A^2}{4} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$$

et son intégrale s'écrit

$$S_X(f) = \frac{A^2}{4} [U(f - f_0) + U(f + f_0)],$$

d'où

$$\Delta S_X(0) = 0.$$

Ceci confirme que le secteur est un signal ergodique au premier ordre.

• Le carré du secteur

La fonction d'autocorrélation du carré du secteur est

$$E[X(t)X(t-\tau)] = \frac{E[A^2]}{4} E\{[1 + \cos(4\pi f_0t + 2\theta)][1 + \cos(4\pi f_0t - 4\pi f_0\tau + 2\theta)]\}$$

$$\begin{aligned} E[X(t)X(t-\tau)] &= \frac{E[A^2]}{4} E\{[1 + \cos(4\pi f_0t + 2\theta)][1 + \cos(4\pi f_0t - 4\pi f_0\tau + 2\theta)]\} \\ &= \frac{E[A^2]}{4} + \frac{E[A^2]}{8} \cos(4\pi f_0\tau), \end{aligned}$$

d'où la densité spectrale de puissance

$$s_X(f) = \frac{E[A^2]}{4} \delta(f) + \frac{E[A^2]}{16} \delta(f - 2f_0) + \frac{E[A^2]}{16} \delta(f + 2f_0)$$

et son intégrale

$$S_X(f) = \frac{E[A^2]}{4} U(f) + \frac{E[A^2]}{16} U(f - 2f_0) + \frac{E[A^2]}{16} U(f + 2f_0).$$

On en déduit

$$\Delta S_X(0) - m^2 = \frac{E[A^2]}{4} - \frac{m_A^2}{4} = \frac{\sigma_A^2}{4}$$

qui est différent de 0 lorsque A est une variable aléatoire (non constante). **Ceci confirme que le carré du secteur est un signal non ergodique.**

2.3.4 Résultats intéressants

- Un signal aléatoire $x(t)$ est ergodique au premier ordre si et seulement si

$$\frac{1}{T} \int_0^T c_X(\tau) d\tau \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} 0$$

où $c_X(\tau) = E[X(t)X^*(t-\tau)] - |m|^2$ est l'**autocovariance** de $X(t)$ (Preuve : livre de Papoulis).

- **Condition suffisante d'ergodicité au premier ordre** : si $c_X(\tau) \xrightarrow{\tau \rightarrow +\infty} 0$, alors $x(t)$ est ergodique au premier ordre (Preuve : voir livre Papoulis).

3 Systèmes à temps continu - Filtrage linéaire invariant dans le temps

L'objectif de ce paragraphe est d'étudier le filtrage des signaux déterministes et aléatoires stationnaires.

3.1 Systèmes à temps continu: définitions et propriétés

Système à temps continu

Dans un cadre déterministe, un système à temps continu est un opérateur T qui associe une fonction y à une fonction d'entrée x , ie. $y = T[x]$ avec

$$y(t) = T[x(t)], \forall t \in \mathbb{R}.$$

Les entrées et sorties de ce système seront typiquement dans $\mathcal{L}_{+\infty}(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{L}_2(\mathbb{R})$.

Système linéaire

Un système sera dit linéaire s'il vérifie $\forall a_1, a_2 \in \mathbb{C}$,

$$T[a_1x_1(t) + a_2x_2(t)] = a_1T[x_1(t)] + a_2T[x_2(t)].$$

Système sans mémoire

Un système sera dit sans mémoire si sa sortie à l'instant t ne dépend que de l'entrée au même instant.

Système causal

Un système est dit causal si la sortie à l'instant t ne dépend de l'entrée que pour des instants $t' \leq t$, i.e., la sortie un instant donné ne dépend pas d'un instant futur. Cette propriété est souvent requise pour qu'un système physique analogique soit réalisable. Cependant nous verrons que pour un signal numérique, cette contrainte peut être contournée car si le système est non causal cela suppose juste que le système peut être réalisable au prix d'un délai de traitement avec stockage des échantillons.

Système invariant par décalage

Un système est dit invariant par décalage ou encore invariant dans le temps s'il vérifie la relation suivante:

$$\text{Si } y(t) = T[x(t)] \text{ alors } T[x(t - t_0)] = y(t - t_0).$$

Cela signifie que si l'entrée du système est translatée dans le temps, la sortie l'est également du même décalage.

Système stable : caractérisation générale

Un système est dit stable si une entrée bornée produit une sortie bornée, i.e., si

$$x \in \mathcal{L}_{\infty}(\mathbb{R}) \Rightarrow y = T[x] \in \mathcal{L}_{\infty}(\mathbb{R})$$

ce qui signifie que si $|x(t)| \leq M_x$ alors il existe M_y tel que

$$|y(t)| = |T[x(t)]| \leq M_y.$$

Cette caractérisation est la plus générale et s'applique quel soit le type de système, linéaire, non linéaire, ... On verra pour les systèmes linéaires que cette caractérisation peut s'affiner.

Exemples :

Pouvez-vous donner les caractéristiques des systèmes suivants et identifier l'opérateur $T[\cdot]$?

1. Système à décalage : $y(t) = x(t - t_0), t \in \mathbb{R}$. À quelle condition le système est-il causal?
2. Intégrateur : $y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau, t \in \mathbb{R}$.
3. Moyenneur : $y(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} x(\tau) d\tau, t \in \mathbb{R}$.
4. Quadrateur : $y(t) = |x(t)|^2, t \in \mathbb{R}$.

3.2 Filtrage des signaux déterministes

Parmi les systèmes à temps continu d'intérêt, on s'intéressera surtout aux systèmes à la fois linéaires et invariants par décalage. Ils définiront une classe de systèmes dénommés *filtres linéaires invariants par décalage (FLID)*. On supposera dans cette section que les signaux en entrée sont des signaux déterministes.

3.2.1 Réponse impulsionnelle, convolution et notion de filtre

Par définition, la réponse impulsionnelle d'un système notée h est la fonction obtenue en sortie d'un système T quand on applique une impulsion de Dirac à l'entrée. Formellement, on a donc la caractérisation suivante

$$h = T[\delta]$$

soit

$$h(t) = T[\delta(t)], \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

À nouveau, on a une définition large qui s'applique à tout système, même si ce dernier n'est pas linéaire invariant par décalage. Cependant, pour le cas linéaire invariant par décalage, on va voir que le système peut être entièrement défini à l'aide de sa réponse impulsionnelle, ce qui en fait un objet incontournable en traitement du signal.

En effet, si on suppose que pour t où $x(t)$ est continue, on peut écrire

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau,$$

en appliquant l'opérateur linéaire invariant par décalage T à $x = \delta$, on obtient alors

$$\begin{aligned} y(t) &= T[x(t)] = T \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau \right] \\ &\stackrel{(1)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) T[\delta(t - \tau)] d\tau \\ &\stackrel{(2)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau = h(t) * x(t) \end{aligned}$$

où (1) est l'application simple de la linéarité de l'opérateur et (2) utilise l'invariance par décalage et l'identification à la réponse impulsionnelle. On remarque également que la linéarité seule ne suffit pas et que l'hypothèse d'invariance par décalage joue un rôle important.

La réponse impulsionnelle h d'un système linéaire invariant par décalage est appelée réponse impulsionnelle d'un **filtre** ou tout simplement **filtre**. Comme h caractérise complètement le comportement de la sortie y en fonction de l'entrée x , on ne fait (la plupart du temps) référence à un système linéaire invariant par décalage caractérisé par l'opérateur T qu'au travers de sa réponse impulsionnelle, et donc l'opérateur T est souvent assimilé à h , qui est appelé filtre linéaire invariant par décalage (FLID). La

notion de filtre fait référence au fait que la sortie est une version "moyennée" de l'entrée par la réponse impulsionnelle *retournée*. L'opération de convolution qui lie l'entrée et la sortie du système est appelée *filtrage*.

3.2.2 Condition nécessaire et suffisante de stabilité des FLID

Un FLID est stable si et seulement si

$$\int_{\mathbb{R}} |h(t)| dt < \infty, \text{ i.e. } , h \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}).$$

La condition est **suffisante** : si l'entrée est dans $\mathcal{L}_p(\mathbb{R})$, alors la sortie d'un système stable est dans $\mathcal{L}_p(\mathbb{R})$ (car le module d'une intégrale est inférieur à l'intégrale du module). La condition est également **suffisante** même si la preuve est un peu plus technique.

3.2.3 Caractérisation d'un filtre

Dans le cas de signaux déterministes, on vérifie qu'une opération définit un filtre linéaire en utilisant la propriété suivante

$$y(t) = x(t) * h(t) \Leftrightarrow Y(f) = X(f)H(f)$$

où $X(f) = \text{TF}[x(t)]$ et $H(f) = \text{TF}[h(t)]$. La transformée de Fourier $H(f)$ s'appelle **transmittance** ou **fonction de transfert** ou encore réponse **réponse fréquentielle**. $H(f)$ peut également se réécrire en fonction de son module et argument

$$H(f) = |H(f)|e^{j \arg(H(f))}$$

où $|H(f)|$ et $\arg(H(f))$ sont respectivement **la réponse en amplitude** et **la réponse en phase** du filtre. L'analyse des systèmes FLID dans le domaine de Fourier permet de mettre en évidence une propriété importante de ces systèmes qui est héritée des propriétés de l'opérateur de convolution sous-jacent à l'action d'un FLID. Considérons les fonctions complexes exponentielles définies par ¹

$$\phi(t) = e^{j2\pi ft}, t \in \mathbb{R}, \text{ pour n'importe quelle fréquence } f \in \mathbb{R}.$$

Pour un FLID $h \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$, on aura

$$\begin{aligned} y(t) &= h(t) * \phi(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi f(t-\tau)} h(\tau) d\tau \\ &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \right] e^{j2\pi ft} \\ &= H(f)\phi(t). \end{aligned}$$

On en déduit que les fonctions exponentielles complexes (de module unité) sont des fonctions propres des FLIDs de valeur propre associée $H(f)$ (appelé également gain complexe ou réponse harmonique).

Pour identifier simplement la réponse impulsionnelle d'un filtre, on peut donc réaliser soit

- un calcul direct dans le domaine temporel en évaluant explicitement $y(t) = h(t)$ pour $x(t) = \delta(t)$,
- un calcul direct de la transmittance en identifiant $H(f)$ pour $x(t) = \phi(t)$,
- une identification directe des termes du produit de convolution pour une entrée $x(t)$ arbitraire.

On remarquera enfin que toute opération linéaire n'est pas un filtre (considérer par exemple $y(t) = m(t)x(t)$ ou $y(t) = x(0)$).

¹NB: La quantité f est appelée fréquence, mesurée en Hertz (Hz), et souvent utilisée par les francophones, alors que la quantité $\omega = 2\pi f$ est la pulsation en radian par seconde (rad/s) qui correspond plus à la notation internationale. En particulier, pour des logiciels comme Matlab, c'est souvent la pulsation qui est utilisée pour la représentation fréquentielle des signaux.

Résumé

Par la suite, le filtrage d'un signal déterministe $x(t)$ par un filtre de réponse impulsionnelle $h(t)$, défini par une opération de convolution qui produit un signal $y(t)$ sera noté

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{\mathbb{R}} x(\tau)h(t - \tau)ds = \int_{\mathbb{R}} h(\tau)x(t - \tau)ds = h(t) * x(t).$$

Souvent, pour que le filtre soit réalisable physiquement, il faut que la réponse impulsionnelle soit **réelle** (pour éviter qu'une entrée réelle puisse fournir une sortie à valeur complexe), **causale** (i.e., $h(t) = 0$ si $t < 0$ pour que la sortie du filtre à l'instant t ne dépende que des entrées aux instants inférieurs à t), dans L^1 (i.e., telle que $\int_{\mathbb{R}} |h(u)|du < +\infty$ pour que le filtre soit **stable**, c'est-à-dire que la sortie soit bornée pour toute entrée bornée).

3.2.4 Relations entrée-sortie de Wiener-Lee

Pour les signaux déterministe (ie. à énergie finie, à puissance finie et périodiques), on peut caractériser analytiquement la fonction d'autocorrélation et la densité spectrale de la sortie du système en fonction des caractéristiques de l'entrée. Ainsi, les relations entre les fonctions d'autocorrélation et densités spectrales de $x(t)$ et de $y(t)$ appelées relations de Wiener-Lee sont données ci-après

- **Densité spectrale de puissance**

$$s_y(f) = s_x(f)|H(f)|^2$$

- **Intercorrélation**

$$R_{yx}(\tau) = R_x(\tau) * h(\tau)$$

- **Autocorrélation**

$$R_y(\tau) = h(\tau) * h^*(-\tau) * R_x(\tau)$$

Cette dernière expression peut se réécrire

$$R_y(\tau) = R_h(\tau) * R_x(\tau)$$

où $R_h(\tau) = h(\tau) * h^*(-\tau)$ peut être interprétée comme une autocorrélation déterministe associée au filtre h . Cette autocorrélation peut être donc vue comme le produit de convolution de h avec le filtre adapté à $h(t)$ donnée par $h^*(-t)$ (voir notion de filtre adapté dans la suite).

Preuve détaillée pour des signaux à énergie finie Le signal d'entrée étant dans $\mathcal{L}_2(\mathbb{R})$, le signal de sortie le sera également et donc on a bien un signal de sortie à énergie finie. Pour la densité spectrale d'énergie, la preuve est triviale par application directe de la définition de la densité spectrale des signaux à énergie finie et écriture de l'opération de filtrage dans le domaine fréquentiel.

$$s_y(f) = |Y(f)|^2 = |H(f)X(f)|^2 = |H(f)|^2 s_x(f).$$

Pour l'intercorrélation, un calcul direct en passant par le domaine fréquentiel et en utilisant l'égalité de Parseval nous donne

$$\begin{aligned} R_{yx}(\tau) &= \int_{\mathbb{R}} y(u)x^*(u - \tau)du \\ &= \int_{\mathbb{R}} Y(f) \left[e^{-j2\pi f\tau} X(f) \right]^* df \\ &= \int_{\mathbb{R}} X(f)H(f) \left[e^{j2\pi f\tau} X^*(f) \right] df \\ &= \int_{\mathbb{R}} s_x(f)H(f)e^{j2\pi f\tau} df \\ &= \text{TF}^{-1} [s_x(f)H(f)] \\ &= h(\tau) * R_x(\tau) \end{aligned}$$

Une preuve alternative est la suivante :

$$R_{yx}(\tau) = y(\tau) * x^*(-\tau) = h(\tau) * (x(\tau) * x^*(-\tau)) = h(\tau) * R_x(\tau).$$

Cette preuve alternative peut également être utilisée pour la fonction d'autocorrélation de la sortie du filtre :

$$\begin{aligned} R_y(\tau) &= \int_{\mathbb{R}} y(u)y^*(u-\tau)du \\ &= y(\tau) * y^*(-\tau) \\ &= h(\tau) * x(\tau) * h^*(-\tau) * x^*(-\tau) \\ &= h(\tau) * h^*(-\tau) * x(\tau) * x^*(-\tau) \\ &= h(\tau) * h^*(-\tau) * R_x(\tau). \end{aligned}$$

Preuve partielle pour des signaux à puissance finie périodiques On considère ici des signaux de $\mathcal{L}_2\left(\left[-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2}\right]\right)$. Par calcul direct dans le domaine temporel, on a l'intercorrélacion comme suit

$$\begin{aligned} R_{yx}(\tau) &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} y(t)x^*(t-\tau)dt \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \left[\int_{\mathbb{R}} h(v)x(t-v)dv \right] x^*(t-\tau)dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} h(v) \left[\frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t-v)x^*(t-\tau)dt \right] dv \\ &= \int_{\mathbb{R}} h(v)R_x(\tau-v)dv. \end{aligned}$$

Les autres quantités se déduisent de la même manière. Pour les signaux à puissance finie non périodiques les preuves sont similaires en changeant de produit scalaire.

3.2.5 Formules des interférences et intercorrélacion entrée-sortie

On considère deux signaux y_1 et y_2 obtenus par filtrage linéaire d'un même signal d'entrée $x(t)$:

$$y_1(t) = x(t) * h_1(t) \text{ et } y_2(t) = x(t) * h_2(t)$$

alors

$$\begin{aligned} R_{y_1 y_2}(\tau) &= \int_{\mathbb{R}} s_x(f)H_1(f)H_2^*(f)e^{j2\pi f\tau}df \\ &= h_1(\tau) * h_2^*(-\tau) * R_x(\tau). \end{aligned}$$

Preuve pour les signaux à énergie finie:

$$\begin{aligned} R_{y_1 y_2}(\tau) &= \int y_1(t)y_2^*(t-\tau)dt = \int_{\mathbb{R}} Y_1(f) \left[Y_2(f)e^{-j2\pi f\tau} \right]^* df \\ &= \int_{\mathbb{R}} H_1(f)H_2^*(f)e^{j2\pi f\tau} s_x(f)df \end{aligned}$$

Dans le domaine de Fourier, on obtient une quantité appelée **inter-spectre** définie par

$$s_{y_1 y_2}(f) = H_1(f)H_2^*(f)s_x(f).$$

Remarque : l'application de cette formule au cas où $y_1(t) = h(t) * x(t)$, $y_2(t) = x(t)$, i.e., avec $h_2(t) = \delta(t)$, nous redonne l'intercorrélacion entrée-sortie donnée par

$$R_{yx}(\tau) = h(\tau) * R_x(\tau).$$

3.3 Filtrage des signaux aléatoires

Le filtrage des signaux aléatoires stationnaires est défini par une opération de convolution

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{\mathbb{R}} x(s)h(t-s)ds = \int_{\mathbb{R}} h(s)x(t-s)ds = h(t) * x(t).$$

où les intégrales sont définies au sens de la **convergence en moyenne quadratique**.

3.4 Identification d'une opération de filtrage linéaire

3.4.1 Définition

Pour identifier une opération de filtrage linéaire, on peut utiliser le fait qu'il existe une **isométrie** entre l'ensemble des signaux aléatoires engendrés par un processus aléatoire stationnaire $x(t)$ (i.e., l'ensemble des combinaisons linéaires de la forme $\sum_{k=1}^N a_k x(t_k)$ et des limites des suites de variables aléatoires ayant cette forme notées $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k_n=1}^{N_n} a_{k_n} x(t_{k_n})$) et l'ensemble des fonctions à valeurs complexes engendrées par $\exp(j2\pi ft)$ (i.e., l'ensemble des combinaisons linéaires de la forme $\sum_{k=1}^N a_k \exp(2\pi ft_k)$ et des limites des suites de variables aléatoires ayant cette forme notées $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k_n=1}^{N_n} a_{k_n} \exp(2\pi ft_{k_n})$). L'espace des signaux aléatoires engendré par $x(t)$ est muni du produit scalaire

$$\langle u(t), v(t) \rangle_1 = E[u(t)v^*(t)]$$

tandis que l'espace des fonctions complexes engendré par $\exp(j2\pi ft)$ est muni du produit scalaire

$$\langle a(t), b(t) \rangle_2 = \int_{\mathbb{R}} a(t)b^*(t)s_x(f)df.$$

Le fait qu'il existe une isométrie entre ces deux espaces découle de l'égalité suivante

$$R_x(\tau) = E[x(t)x^*(t-\tau)] = \langle x(t), x(t-\tau) \rangle_1$$

et du fait que

$$R_x(\tau) = \text{TF}^{-1}(s_x(f)) = \int_{\mathbb{R}} s_x(f) \exp(j2\pi f\tau)df = \langle \exp(j2\pi ft), \exp(j2\pi f(t-\tau)) \rangle_2.$$

Pour plus de détails, on pourra se reporter à l'excellent livre de Yaglom [2]. On notera $x(t) \leftrightarrow \exp(j2\pi ft)$ le fait que $x(t)$ admette $\exp(j2\pi ft)$ comme correspondance par l'isométrie. On en déduit

$$x(t) * h(t) = \int_{\mathbb{R}} h(s)x(t-s)ds \leftrightarrow \int_{\mathbb{R}} h(s) \exp[j2\pi f(t-s)]ds = \exp(j2\pi ft)H(f)$$

qui caractérise l'opération de filtrage linéaire. On en déduit le résultat suivant

Pour vérifier qu'une opération $y(t) = T[x(t)]$ est une opération de filtrage linéaire, on remplace $x(t)$ par $\exp(j2\pi ft)$ dans l'expression de $y(t)$ et on factorise par $\exp(j2\pi ft)$. Si le terme devant $\exp(j2\pi ft)$ ne dépend que de f (et pas de t), on le note $H(f)$ et on a une opération de filtrage linéaire avec un filtre de transmittance $H(f)$. Si le terme devant $\exp(j2\pi ft)$ dépend de t , on n'a pas une opération de filtrage linéaire.

Ce résultat peut également s'expliquer à l'aide de la notion de **réponse harmonique** : si on met un signal de fréquence f_0 à l'entrée d'un filtre, i.e., $x(t) = \exp(2\pi f_0 t)$, la sortie du filtre est également une fréquence pure mais dont l'amplitude est la phase ont été modifiées par le filtre, i.e., $y(t) = H(f_0) \exp(2\pi f_0 t)$.

3.4.2 Exemples

- Exemple 1 : $y(t) = x'(t)$

$$x'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h} \leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\exp(j2\pi f(t+h)) - \exp(j2\pi ft)}{h} = (j2\pi f) \exp(j2\pi ft).$$

Comme $H(f) = j2\pi f$ est indépendant de t , $y(t) = x'(t)$ est la sortie d'un filtre linéaire de transmittance $H(f) = j2\pi f$ (appelé filtre dérivateur)

- Exemple 2 : $y(t) = \sum_{k=1}^K a_k x(t - t_k)$

$$y(t) \leftrightarrow \sum_{k=1}^K a_k \exp(j2\pi f(t - t_k)) = \exp(j2\pi ft) \sum_{k=1}^K a_k \exp(j2\pi ft_k)$$

Comme $H(f) = \sum_{k=1}^K a_k \exp(j2\pi ft_k)$ est indépendant de t , on a une opération de filtrage linéaire avec un filtre de transmittance $H(f)$ (appelé filtre multi-trajets)

- Exemple 3 : $y(t) = x(t)m(t)$ avec $m(t)$ indépendant de $x(t)$

$$x(t)m(t) \leftrightarrow \exp(j2\pi ft)m(t).$$

La correspondance de $x(t)m(t)$ ne peut pas s'écrire $\exp(j2\pi ft)H(f)$ car $m(t)$ est une fonction de t (et pas de f) donc l'opération qui à $x(t)$ associe $x(t)m(t)$ n'est pas une opération de filtrage linéaire.

3.5 Relations de Wiener-Lee

Les relations de Wiener-Lee sont valables pour des signaux aléatoires stationnaires, comme le montre cette partie.

- **Intercorrélation**

$$R_{yx}(\tau) = R_x(\tau) * h(\tau)$$

Pour démontrer cette relation, il suffit d'exprimer le produit scalaire à l'aide de l'isométrie

$$\begin{aligned} R_{yx}(\tau) &= E[y(t)x^*(t - \tau)] \\ &= \langle y(t), x(t - \tau) \rangle_1 \\ &= \langle \exp(j2\pi ft)H(f), \exp(j2\pi f(t - \tau)) \rangle_2 \\ &= \int_{\mathbb{R}} \exp(j2\pi ft)H(f) \exp(-j2\pi f(t - \tau))s_x(f)df \\ &= \int_{\mathbb{R}} H(f) \exp(j2\pi f\tau)s_x(f)df \\ &= \text{TF}^{-1}[H(f)s_x(f)] \\ &= R_x(\tau) * h(\tau). \end{aligned} \tag{38}$$

- **Autocorrélation**

$$R_y(\tau) = R_x(\tau) * h(\tau) * h^*(-\tau)$$

On procède comme ci-dessus

$$\begin{aligned}
R_y(\tau) &= E[y(t)y^*(t-\tau)] \\
&= \langle y(t), y(t-\tau) \rangle_1 \\
&= \langle \exp(j2\pi ft)H(f), \exp(j2\pi f(t-\tau))H^*(f) \rangle_2 \\
&= \int_{\mathbb{R}} \exp(j2\pi ft)H(f) \exp(-j2\pi f(t-\tau))H^*(f)s_x(f)df \\
&= \int_{\mathbb{R}} H(f)H^*(f) \exp(j2\pi f\tau)s_x(f)df \\
&= \text{TF}^{-1}[|H(f)|^2 s_x(f)] \\
&= R_x(\tau) * h(\tau) * h^*(-\tau).
\end{aligned} \tag{39}$$

- **Densité spectrale de puissance**

$$s_y(f) = s_x(f)|H(f)|^2$$

Comme $s_y(f) = \text{TF}[R_y(\tau)]$, le résultat découle de l'avant dernière ligne de l'équation précédente.

- **Moyenne**

La moyenne de la sortie d'un filtre vérifie la relation suivante

$$E[y(t)] = H(0)E[x(t)]$$

En effet

$$\begin{aligned}
E[y(t)] &= E[x(t) * h(t)] \\
&= E \left[\int_{\mathbb{R}} h(s)x(t-s)ds \right] \\
&= \int_{\mathbb{R}} h(s)E[x(t-s)]ds \\
&= E[x(t-s)] \int_{\mathbb{R}} h(s)ds \\
&= E[x(t)]H(0)
\end{aligned} \tag{40}$$

où on a utilisé l'égalité $E[x(t-s)] = E[x(t)]$ qui découle de la stationnarité du signal $x(t)$.

- **Formule des interférences**

Cette formule exprime l'intercorrélation entre les sorties de deux filtres de transmittances $H_1(f)$ et $H_2(f)$ de même entrée $x(t)$. Ces deux sorties sont donc définies par $y_1(t) = x(t) * h_1(t)$ et $y_2(t) = x(t) * h_2(t)$ et on a

$$E[y_1(t)y_2^*(t-\tau)] = \int_{\mathbb{R}} H_1(f)H_2^*(f) \exp(j2\pi f\tau)s_x(f)df.$$

La preuve est similaire à celle utilisée pour déterminer l'autocorrélation de la sortie d'un filtre

$$\begin{aligned}
R_{y_1 y_2}(\tau) &= E[y_1(t)y_2^*(t-\tau)] \\
&= \langle y_1(t), y_2(t-\tau) \rangle_1 \\
&= \langle \exp(j2\pi ft)H_1(f), \exp(j2\pi f(t-\tau))H_2^*(f) \rangle_2 \\
&= \int_{\mathbb{R}} \exp(j2\pi ft)H_1(f) \exp(-j2\pi f(t-\tau))H_2^*(f)s_x(f)df \\
&= \int_{\mathbb{R}} H_1(f)H_2^*(f) \exp(j2\pi f\tau)s_x(f)df.
\end{aligned} \tag{41}$$

Cette relation montre par exemple que si les deux canaux $H_1(f)$ et $H_2(f)$ ont de supports disjoints (ce qui implique $H_1(f)H_2(f) = 0$, on a $E[y_1(t)y_2^*(t - \tau)] = 0$, ce qui signifie que les signaux $y_1(t)$ et $y_2(t - \tau)$ sont décorrélés, ce qui n'est pas très intuitif car l'entrée des deux filtres est la même !!

3.6 Filtrage adapté

3.6.1 Définition

L'objectif du filtre adapté (matched filter en Anglais) est de **débruiter un signal déterministe connu noyé dans un bruit additif**. On suppose donc qu'on observe le signal $x(t)$ défini par

$$x(t) = s(t) + n(t), \quad t \in [0, T]$$

où $s(t)$ est un signal déterministe à énergie finie connu et $n(t)$ est un signal aléatoire stationnaire de moyenne nulle et de densité spectrale de puissance $s_n(f)$. On cherche à débruiter le signal $x(t)$ à l'aide d'un filtre de réponse impulsionnelle $h(t)$ et de transmittance $H(f)$. La sortie de ce filtre est définie par

$$y(t) = y_s(t) + y_n(t) = s(t) * h(t) + n(t) * h(t).$$

Le filtre adapté (au signal $s(t)$ connu) est obtenu en maximisant le rapport signal sur bruit

$$\text{SNR}(t_0) = \frac{y_s^2(t_0)}{E[y_n^2(t_0)]}$$

qui est le rapport des puissances du signal y_s et du signal y_n à l'instant de décision t_0 (le choix de t_0 sera discuté plus tard).

3.6.2 Expression du filtre

Des calculs élémentaires permettent d'obtenir l'expression suivante du rapport signal sur bruit

$$\text{SNR}(t_0) = \frac{y_s^2(t_0)}{E[y_n^2(t_0)]} = \frac{|\int_{\mathbb{R}} H(f)S(f)e^{j2\pi ft_0} df|^2}{\int_{\mathbb{R}} |H(f)|^2 s_n(f) df}$$

En effet

- **Numérateur**

$$y_s(t) = \text{TF}^{-1}[S(f)H(f)] = \int_{\mathbb{R}} H(f)S(f)e^{j2\pi ft} df$$

- **Dénominateur**

$$P_{y_n} = E[y_n^2(t_0)] = R_{y_n}(0) = \int_{\mathbb{R}} s_n(f) |H(f)|^2 df$$

En introduisant les notations $a(f) = \sqrt{s_n(f)}H(f)$ et $b(f) = \frac{S^*(f)}{\sqrt{s_n(f)}}e^{-j2\pi ft_0}$, on obtient

$$\text{SNR}(t_0) = \frac{|\int_{\mathbb{R}} a(f)b^*(f)df|^2}{\int_{\mathbb{R}} a(f)a^*(f)df}$$

et donc en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on obtient

$$\text{SNR}(t_0) \leq \int_{\mathbb{R}} b(f)b^*(f)df$$

avec égalité lorsque

$$a(f) = kb(f) \Leftrightarrow H(f) = k \frac{S^*(f)}{s_n(f)} e^{-j2\pi ft_0}.$$

Dans le cas particulier d'un **bruit blanc**, on obtient

$$H(f) = KS^*(f)e^{-j2\pi ft_0} \Leftrightarrow \boxed{h(t) = Ks^*(t_0 - t)}$$

ce qui correspond à une **symétrie par rapport à l'axe oy de $s(t)$ suivi d'une translation de t_0** .

3.6.3 SNR maximum

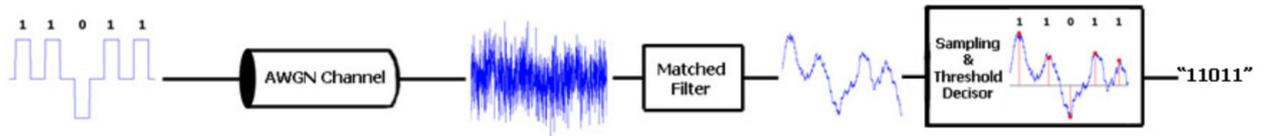
Le rapport signal sur bruit maximum est défini par

$$\text{SNR}(t_0)^{\max} = \int_{\mathbb{R}} b(f)b^*(f)df = \int_{\mathbb{R}} \frac{2}{N_0} |S(f)|^2 df = \frac{2E}{N_0}$$

où E est l'énergie du signal. On voit donc que le rapport signal à bruit maximal ne dépend pas de la forme du signal mais uniquement de son **énergie**.

3.6.4 Applications

Le filtre adapté est utilisé dans tout récepteur d'un système de communication numérique. Dans cette application, on connaît les signaux $s_0(t)$ et $s_1(t)$ qui sont utilisés pour la mise en forme des bits "0" et "1". Lorsqu'on a $s_1(t) = -s_0(t)$ (ce qui est le cas par exemple pour la mise en forme du signal biphase), le filtre adapté à $s_0(t)$ est aussi adapté à $s_1(t)$. Cette application est illustrée sur la figure ci-dessous issue de la page wikipedia sur le filtre adapté (matched filter en anglais)



3.7 Filtrage de Wiener

3.7.1 Définition

Le filtre de Wiener est un filtre qui permet de débruiter un signal aléatoire stationnaire de densité spectrale de puissance connue noyé dans un bruit additif supposé également stationnaire. On considère donc deux processus aléatoires stationnaires $I(t)$ et $B(t)$ de moyennes nulles (ce qui simplifie un peu l'analyse) $E[B(t)] = E[I(t)] = 0$, de fonctions d'autocorrélation $R_I(\tau)$, $R_B(\tau)$ et de densités spectrales de puissance $s_I(f)$ et $s_B(f)$. On suppose qu'on peut observer

$$X(t) = I(t) + B(t), \quad t \in \Delta \subset \mathbb{R}$$

et on cherche la **meilleure estimation** de $I(t)$ notée $\hat{I}(t)$ obtenue par filtrage linéaire de $X(t)$.

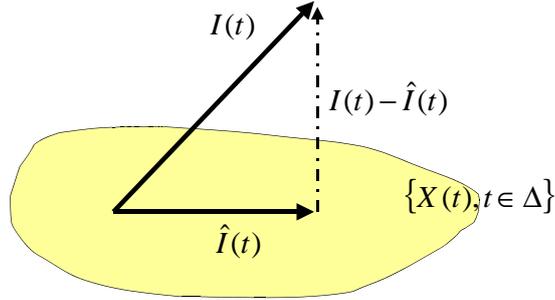
3.7.2 Expression du filtre

D'après le principe de la projection orthogonale illustré sur la figure ci-dessous, la solution de ce problème vérifie les **équations normales** définies par

$$E \left\{ \left[I(t) - \hat{I}(t) \right] X^*(u) \right\} = 0 \quad \forall u$$

ou

$$E [I(t)I^*(u)] = E \left[\hat{I}(t)X^*(u) \right] \quad \forall u \quad (42)$$



En remarquant que $E[I(t)I^*(u)] = R_I(t-u)$ et que $\hat{I}(t) = X(t) * h(t) = \int X(v)h(t-v)dv$, où $h(t)$ est la réponse impulsionnelle recherchée, on obtient

$$E[\hat{I}(t)X^*(u)] = \int h(t-v)R_X(v-u)dv = \int h(x)R_X(t-u-x)dx.$$

Les équations normales (42) permettent alors d'obtenir

$$R_I(y) = \int h(x)R_X(y-x)dx = h(y) * R_X(y) \quad \forall y.$$

On en déduit l'expression de la transmittance du filtre recherché $H(f)$ en fonction des densités spectrales de puissance de $I(t)$ et de $B(t)$

$$H(f) = \frac{s_I(f)}{s_X(f)} = \frac{s_I(f)}{s_I(f) + s_B(f)}$$

3.7.3 Expression du filtre

L'erreur d'estimation entre $I(t)$ et $\hat{I}(t)$ possède une expression très simple qui est définie par

$$\sigma^2 = E[|I(t) - \hat{I}(t)|^2] = \int \frac{s_I(f)s_B(f)}{s_I(f) + s_B(f)} df$$

En effet

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= E[|I(t) - \hat{I}(t)|^2] \\ &= E\left\{[I(t) - \hat{I}(t)]I^*(t)\right\} \quad (\text{car } I(t) - \hat{I}(t) \text{ est orthogonal à } \hat{I}(t)) \\ &= R_I(0) - E[\hat{I}(t)I^*(t)] \end{aligned}$$

Le second terme de cette égalité peut se calculer simplement comme suit, en utilisant $\hat{I}(t) = X(t) * h(t) = \int X(u)h(t-u)dv$ et $X(u) = I(u) + B(u)$

$$E[\hat{I}(t)I^*(t)] = \int h(t-u)E[I(u)I^*(t)]du + \int h(t-u)E[B(u)I^*(t)]$$

$$= \int h(x)R_I^*(x)dx$$

d'où

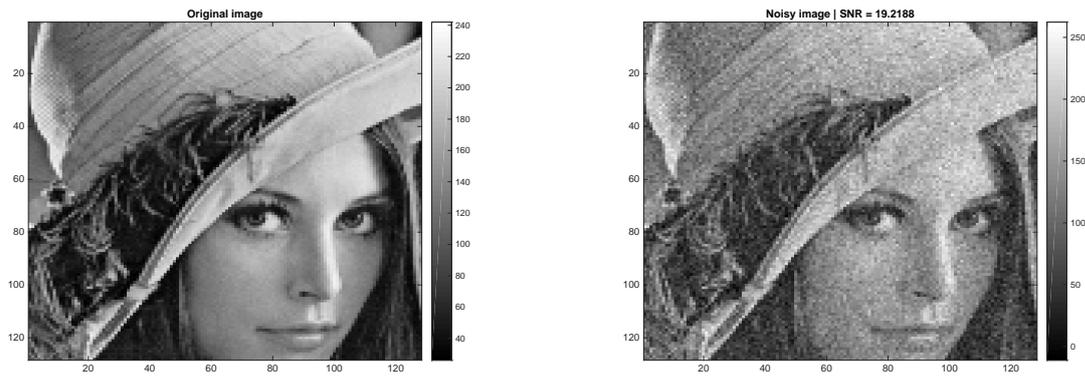
$$\sigma^2 = \int s_I(f)df - \int H(f)s_I(f)df = \int \frac{s_I(f)s_B(f)}{s_I(f) + s_B(f)}df$$

On peut faire les remarques suivantes

- l'erreur est nulle lorsqu'il n'y a pas de bruit (i.e., lorsque $s_b(f) = 0$)
- l'erreur est nulle lorsque les DSP du signal et du bruit ont des supports disjoints (ce qui implique $s_I(f)s_B(f) = 0$)

3.7.4 Applications

Une application classique du filtre de Wiener est le débruitage d'images. Quelques résultats obtenus avec cette méthode sont présentés dans les images ci-dessous.



4 Traitements non-linéaires

Les traitements à base de filtres ne sont pas les seuls types de traitements que l'on peut utiliser. Si l'aspect linéaire des traitements est très attractif du point de vue de la complexité, on doit dans certaines applications utiliser des traitements non linéaires. On considère dans ce chapitre des traitements dits non-linéaires et sans mémoire qui à un signal d'entrée $x(t)$, génèrent un signal de sortie $y(t)$ défini par une transformation g telle que

$$y(t) = g[x(t)].$$

Parmi les exemples classiques, on étudiera en particulier

- Le **quadratureur**, qui à un signal réel $x(t)$ associe le signal

$$y(t) = x^2(t)$$

- l'opération de **quantification** qui sera notée

$$y(t) = x_Q(t)$$

4.1 Cas des signaux déterministes - exemple du quadratureur

Dans le cas déterministe, la relation

$$y(t) = g[x(t)]$$

ne vérifiant pas l'axiomatique d'un FLID, on ne peut pas se contenter d'une caractérisation du système par sa réponse impulsionnelle. Pour déterminer le comportement de la sortie du système, il faut souvent calculer explicitement l'expression de la sortie en fonction de l'entrée dans le domaine temporel ou fréquentiel, selon la facilité à calculer dans l'un ou l'autre domaine. On est donc fortement dépendant de la forme explicite de l'opérateur non linéaire g .

4.1.1 Propriété générale

Si l'on prend l'exemple du quadratureur, on a

$$y(t) = x^2(t)$$

et donc dans le domaine fréquentiel

$$Y(f) = X(f) * X(f).$$

On montre que si le support de $X(f)$ est $]-F_1, +F_1[$, alors celui de $Y(f) = X(f) * X(f)$ est inclus dans $]-2F_1, 2F_1[$ (et est en général égal à $]-2F_1, 2F_1[$). L'effet d'un quadratureur est donc d'élargir le support fréquentiel du signal, ce qui dans des applications comme les télécommunications peut poser souci du point de vue système.

4.1.2 Signal sinusoïdal

Si on considère en entrée le signal $x(t) = A \cos(2\pi f_0 t)$, un simple calcul de la transformée de Fourier de $y(t) = x^2(t)$ nous donne

$$Y(f) = \frac{A^2}{2} \delta(f) + \frac{A^2}{4} [\delta(f - 2f_0) + \delta(f + 2f_0)].$$

On voit alors la disparition de la fréquence f_0 et l'apparition de la fréquence double $2f_0$.

4.1.3 Signal sinus cardinal

Si on considère le cas d'un signal de type sinus cardinal donné par $x(t) = f_0 \text{sinc}(\pi f_0 t)$ (avec $\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$) de transformée de Fourier $X(f) = \Pi_{f_0}(f)$, alors on obtient

$$Y(f) = f_0 \Lambda_{f_0}(f).$$

On voit bien sur cet exemple que la bande fréquentielle du signal a été doublée!

4.1.4 Exercice

Que se passe-t-il si on a plusieurs signaux cosinus à des fréquences différentes en entrée du quadrateur ?

4.2 Cas des signaux aléatoires

L'objectif de cette partie est d'expliquer comment on peut déterminer la fonction d'autocorrélation et la densité spectrale de puissance d'un signal défini par une transformée non-linéaire sans mémoire g d'un signal aléatoire stationnaire $x(t)$. Comme nous allons le voir, l'outil fondamental pour cette détermination est le théorème de Price qui est résumé ci-dessous (dans sa version la plus simple).

4.2.1 Théorème de Price

Pour tout vecteur Gaussien centré $\mathbf{X} = (X_1, X_2)^T$, on a pour toute fonction non-linéaire g

$$\frac{\partial E(Y_1 Y_2)}{\partial E(X_1 X_2)} = E \left(\frac{\partial Y_1}{\partial X_1} \frac{\partial Y_2}{\partial X_2} \right)$$

avec $Y_1 = g(X_1)$ et $Y_2 = g(X_2)$ (pour la preuve, on pourra consulter [3, p. 112] ou l'annexe 5.1). En considérant $X_1 = x(t)$, $X_2 = x(t - \tau)$, on a $Y_1 = y(t) = g[x(t)]$, $Y_2 = y(t - \tau) = g[x(t - \tau)]$ et donc

$$\frac{\partial R_y(\tau)}{\partial R_x(\tau)} = E \left[\frac{\partial y(t)}{\partial x(t)} \frac{\partial y(t - \tau)}{\partial x(t - \tau)} \right].$$

On remarquera que la relation ci-dessus utilise implicitement le fait que $y(t) = g[x(t)]$ est un signal aléatoire stationnaire, ce qui découle du fait que $\mathbf{x} = (x(t), x(t - \tau))^T$ est un vecteur Gaussien centré de matrice de covariance notée Σ . En effet

$$E[Y(t)Y(t - \tau)] = \int \int g(x_1) g(x_2) p(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad (43)$$

avec $x_1 = X(t)$, $x_2 = X(t - \tau)$ et

$$p(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{|\Sigma|}} \exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{x}^T \Sigma^{-1} \mathbf{x}\right)$$

avec

$$\Sigma = \begin{pmatrix} R_X(0) & R_X(\tau) \\ R_X(\tau) & R_X(0) \end{pmatrix}.$$

En injectant $p(x_1, x_2)$ et Σ dans (43), on en déduit que $E[Y(t)Y(t - \tau)]$ dépend uniquement de $R_x(\tau)$ et de $R_x(0)$ et ne dépend donc pas de t . De même

$$E[Y(t)] = \int g(x_1) p(x_1, \cdot) dx_1$$

où $p(x_1, \cdot)$ est la densité de $x_1 = x(t)$ définie par

$$p(x_1, \cdot) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} \exp\left(-\frac{x_1^2}{2\sigma_1^2}\right).$$

Comme $\sigma_1^2 = \text{var}[x(t)] = R_x(0)$, on en déduit que $E[Y(t)]$ ne dépend que de $R_x(0)$ et donc ne dépend pas de t .

4.2.2 Exemple d'application : le quadrateur

Dans le cas où $y(t) = x^2(t)$, l'application du théorème de Price permet d'obtenir

$$\frac{\partial R_y(\tau)}{\partial R_x(\tau)} = E \left[\frac{\partial y(t)}{\partial x(t)} \frac{\partial y(t-\tau)}{\partial x(t-\tau)} \right] = 4E[x(t)x(t-\tau)] = 4R_x(\tau).$$

Cette équation s'intègre et conduit à

$$R_y(\tau) = 2R_x^2(\tau) + C$$

où C est une constante qui peut par exemple se déterminer en considérant la valeur particulière $\tau = 0$:

$$C = R_y(0) - 2R_x^2(0).$$

La détermination de $R_y(0) = E[x^4(t)]$ se fait simplement si on connaît l'expression des moments d'une loi gaussienne centrée X

$$E(X^{2n+1}) = 0, \quad E(X^{2n}) = [(2n-1) \times (2n-3) \dots \times 3 \times 1] \sigma^{2n}.$$

On obtient donc

$$E[x^2(t)] = \sigma^2 = R_x(0) \quad \text{et} \quad E[x^4(t)] = 3\sigma^4 = 3R_x^2(0)$$

d'où $C = R_x^2(0)$.

Remarque : pour déterminer la constante C , on peut aussi utiliser le fait que si le signal gaussien centré est asymptotiquement décorréolé (i.e., $R_x(\tau)$ tend vers 0 lorsque τ tend vers $+\infty$), alors $x(t)$ et $x(t-\tau)$ sont asymptotiquement indépendants, d'où

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} R_x(\tau) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} E[x^2(t)x^2(t-\tau)] = R_x^2(0).$$

On a donc

$$C = \lim_{\tau \rightarrow \infty} [R_y(\tau) - R_x^2(\tau)] = R_x^2(0).$$

On remarquera qu'il existe des signaux aléatoires gaussiens tels que $R_x(\tau)$ ne tend pas vers 0 lorsque τ tend vers $+\infty$, par exemple

$$x(t) = Ae^{j2\pi f_0 t},$$

où A est une variable aléatoire gaussienne.

4.2.3 Autre exemple d'application : théorème de Van Vleck

L'application du théorème de Price est parfois plus compliquée que dans l'exemple précédent, comme nous allons le voir dans cet exemple où $y(t) = \text{sign}[x(t)]$ (la fonction $\text{sign}(x)$ vaut 1 pour $x > 0$, -1 pour $x < 0$ et par convention $\text{sign}(0) = 0$). Dans cet exemple, le théorème de Price permet d'obtenir

$$\frac{\partial R_y(\tau)}{\partial R_x(\tau)} = E \left[\frac{\partial y(t)}{\partial x(t)} \frac{\partial y(t-\tau)}{\partial x(t-\tau)} \right] = 4E\{\delta[x(t)]\delta[x(t-\tau)]\}.$$

Pour déterminer $R_y(\tau)$, il faut déterminer le second membre de cette équation, ce qui se fait comme suit

$$E\{\delta[x(t)]\delta[x(t-\tau)]\} = \int \int \delta[x_1]\delta[x_2]p(x_1, x_2)dx_1dx_2.$$

d'où

$$E\{\delta[x(t)]\delta[x(t-\tau)]\} = \int \int \delta[x_1]\delta[x_2]p(0, 0)dx_1dx_2 = p(0, 0) = \frac{1}{2\pi\sqrt{|\Sigma|}}.$$

On en conclut

$$\frac{\partial R_y(\tau)}{\partial R_x(\tau)} = \frac{4}{2\pi \sqrt{R_x^2(0) - R_x^2(\tau)}}$$

qui s'intègre pour donner

$$R_y(\tau) = \frac{2}{\pi} \text{Arcsin} \left[\frac{R_x(\tau)}{R_x(0)} \right] + C.$$

La constante C s'obtient en faisant $\tau = 0$

$$C = R_y(0) - \frac{2}{\pi} \text{Arcsin}(1) = R_y(0) - 1.$$

Mais

$$R_y(0) = E[y^2(t)] = 1$$

d'où $C = 0$ et

$$R_y(\tau) = \frac{2}{\pi} \text{Arcsin} \left[\frac{R_x(\tau)}{R_x(0)} \right].$$

4.3 Quantification

L'opération de quantification est l'opération qui consiste à représenter des échantillons d'un signal analogique (à priori à valeur dans \mathbb{R}) par un signal qui peut prendre un ensemble fini de valeurs, la cardinalité de ce dernier étant liée au nombre de bits que l'on se donne pour représenter ce signal. Pour un signal suppose borné à valeurs dans l'intervalle $[-A_{\max}, A_{\max}]$, on va partitionner cet intervalle en $N = 2^b$ intervalles distincts. Si le signal $x(t)$ est à valeur dans l'un de ces intervalles, on lui assignera une valeur dans cet intervalle qui servira de représentant, comme par exemple le milieu de l'intervalle. On peut alors représenter le signal de la façon suivante

$$x_Q(t) = i\Delta q_i = x_i \text{ et } x_i - \frac{\Delta q_i}{2} \leq x(t) \leq x_i + \frac{\Delta q_i}{2}$$

avec les quantités suivantes:

- Δq_i est appelé pas de quantification
- si $\Delta q_i = \Delta q = \frac{2A_{\max}}{N}$, on parle de quantification uniforme
- x_i est appelé niveau de quantification
- $N = 2^n$ est le nombre de niveaux de quantification et n le nombre de bits de quantification

De manière intuitive, on voit que plus N est grand, plus on aura une représentation "fine" du signal, sans distorsion/déformation. La question est donc maintenant de déterminer quel est l'impact de la quantification sur la représentation du signal. Pour cela, on va adopter un cadre aléatoire et modéliser le signal quantifié comme le signal original plus un bruit additif de quantification. On a donc

$$x_Q(t) = x(t) + \epsilon(t)$$

où $\epsilon(t)$ est le bruit additif de quantification. Lorsque le nombre de niveaux de quantification N est suffisamment grand, on peut supposer que $\epsilon(t)$ suit une loi uniforme sur $\left[-\frac{\Delta q}{2}, \frac{\Delta q}{2}\right]$. Pour déterminer, l'influence de ce bruit, on va naturellement calculer un rapport signal sur bruit (en anglais signal-to-noise ratio, SNR) dont l'expression en dB est donnée par

$$\text{SNR}_{\text{dB}} = 10 \log_{10} \left(\frac{\sigma_x^2}{\sigma_\epsilon^2} \right)$$

où σ_x^2 est la puissance du signal $x(t)$ et σ_ϵ^2 est la puissance du bruit additif $\epsilon(t)$. Il faut maintenant faire des hypothèses sur les signaux si on veut pouvoir calculer quelque-chose. D'après les hypothèses liées à la loi du bruit $\epsilon(t)$ (loi uniforme), un calcul immédiat permet de calculer la variance de ce bruit

$$\sigma_\epsilon^2 = \frac{(\Delta q)^2}{12}.$$

Supposons un signal utile de type sinusoïdal d'amplitude A , comme vu en exercice, on obtient

$$\sigma_x^2 = \frac{A^2}{2}.$$

On obtient alors après report des expressions obtenues ci-dessus

$$\text{SNR}_{\text{dB}} \simeq 6n + 1.76.$$

C'est la fameuse règle du "6dB par bit". Cette règle simple montre que chaque bit additionnel de quantification permet d'améliorer le rapport signal sur bruit de 6dB. Cette règle simple et correspondant à un modèle simple permet cependant en pratique de bien capturer l'effet de la quantification.

Ces résultats peuvent être généralisés à d'autres types de signaux $x(t)$ comme les signaux gaussiens. On peut également considérer une quantification non uniforme, i.e., dont la taille des intervalles est dépendante de la distribution de l'amplitude du signal.

5 Annexes

5.1 Preuve du théorème de Price

Pour tout vecteur Gaussien centré $\mathbf{X} = (X_1, X_2)^T$, on a pour toute fonction non-linéaire g telle que $Y_1 = g(X_1)$ et $Y_2 = g(X_2)$ le résultat suivant

$$\frac{\partial E(Y_1 Y_2)}{\partial E(X_1 X_2)} = E \left(\frac{\partial Y_1}{\partial X_1} \frac{\partial Y_2}{\partial X_2} \right)$$

Le vecteur $\mathbf{X} = (X_1, X_2)^T$ étant Gaussien centré, il possède la densité

$$p(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi\sqrt{|\Sigma|}} \exp \left[-\frac{1}{2} (\mathbf{x}^T \Sigma^{-1} \mathbf{x}) \right]$$

avec $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$ et $\Sigma \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est la matrice de covariance définie par

$$\Sigma = \begin{pmatrix} E[X_1^2] & E[X_1 X_2] \\ E[X_1 X_2] & E[X_2^2] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & E[X_1 X_2] \\ E[X_1 X_2] & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

donc

$$E[g(X_1)g(X_2)] = \int \int g(x_1)g(x_2)p(\mathbf{x})dx_1dx_2.$$

On suppose que les deux fonctions non-linéaires $g(x_1)$ et $g(x_2)$ ont des transformées de Fourier telles que

$$G(f_1) = \int g(x_1)e^{-j2\pi f_1 x_1} dx_1 \text{ et } G(f_2) = \int g(x_2)e^{-j2\pi f_2 x_2} dx_2.$$

On a alors

$$g(x_1) = \text{TF}^{-1}[G(f_1)] = \int G(f_1)e^{j2\pi f_1 x_1} df_1 \text{ et } g(x_2) = \text{TF}^{-1}[G(f_2)] = \int G(f_2)e^{j2\pi f_2 x_2} df_2$$

et donc

$$E[g(X_1)g(X_2)] = \int \int \left[\int G(f_1)e^{j2\pi f_1 x_1} df_1 \right] \left[\int G(f_2)e^{j2\pi f_2 x_2} df_2 \right] p(\mathbf{x})dx_1dx_2.$$

En supposant qu'on peut intervertir les différentes intégrales, on obtient

$$E[g(X_1)g(X_2)] = \int \int G(f_1)G(f_2) \left[\int \int e^{j2\pi(f_1 x_1 + f_2 x_2)} p(\mathbf{x})dx_1dx_2 \right] df_1 df_2$$

Cette expression fait intervenir la fonction caractéristique du vecteur Gaussien (X_1, X_2) qui est connue, d'où

$$\begin{aligned} \int \int e^{j2\pi(f_1 x_1 + f_2 x_2)} p(\mathbf{x})dx_1dx_2 &= \phi(2\pi f_1, 2\pi f_2) \\ &= \exp \left\{ -\frac{1}{2} [2\pi f_1, 2\pi f_2] \Sigma \begin{bmatrix} 2\pi f_1 \\ 2\pi f_2 \end{bmatrix} \right\} \\ &= \exp \left[-2\pi^2 f_1^2 \sigma_1^2 - 2\pi^2 f_2^2 \sigma_2^2 - 4\pi^2 f_1 f_2 E[X_1 X_2] \right]. \end{aligned}$$

En dérivant cette dernière expression par rapport à $E[X_1 X_2]$, on obtient

$$\frac{\partial \exp \left[-2\pi^2 f_1^2 \sigma_1^2 - 2\pi^2 f_2^2 \sigma_2^2 - 4\pi^2 f_1 f_2 E[X_1 X_2] \right]}{\partial E(X_1 X_2)} = -4\pi^2 f_1 f_2 \exp \left[-2\pi^2 f_1^2 \sigma_1^2 - 2\pi^2 f_2^2 \sigma_2^2 - 4\pi^2 f_1 f_2 E[X_1 X_2] \right]$$

d'où

$$\begin{aligned}\frac{\partial E(Y_1 Y_2)}{\partial E(X_1 X_2)} &= - \int \int 4\pi^2 f_1 f_2 G(f_1) G(f_2) \exp[-2\pi^2 f_1^2 \sigma_1^2 - 2\pi^2 f_2^2 \sigma_2^2 - 4\pi^2 f_1 f_2 E[X_1 X_2]] df_1 df_2 \\ &= - \int \int 4\pi^2 f_1 f_2 G(f_1) G(f_2) \phi(2\pi f_1, 2\pi f_2) df_1 df_2.\end{aligned}$$

Par ailleurs

$$E\left(\frac{\partial Y_1}{\partial X_1} \frac{\partial Y_2}{\partial X_2}\right) = \int \int \frac{\partial Y_1}{\partial X_1} \frac{\partial Y_2}{\partial X_2} p(\mathbf{x}) dx_1 dx_2.$$

Utilisant le fait que $\text{TF}\left[\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\right] = j2\pi f_1 G_1(f_1)$ et que $\text{TF}\left[\frac{\partial y_2}{\partial x_2}\right] = j2\pi f_2 G_2(f_2)$, on obtient

$$\begin{aligned}E\left(\frac{\partial Y_1}{\partial X_1} \frac{\partial Y_2}{\partial X_2}\right) &= \int \int \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \frac{\partial y_2}{\partial x_2} p(\mathbf{x}) dx_1 dx_2 \\ &= \int \int \left[\int (j2\pi f_1) G(f_1) e^{j2\pi f_1 x_1} df_1 \right] \left[\int (j2\pi f_2) G(f_2) e^{j2\pi f_2 x_2} df_2 \right] p(\mathbf{x}) dx_1 dx_2 \\ &= \int \int (j2\pi f_1) G(f_1) (j2\pi f_2) G(f_2) \left[\int \int e^{j2\pi(f_1 x_1 + f_2 x_2)} p(\mathbf{x}) dx_1 dx_2 \right] df_1 df_2 \\ &= \int \int (j2\pi f_1) G(f_1) (j2\pi f_2) G(f_2) \phi(2\pi f_1, 2\pi f_2) df_1 df_2,\end{aligned}$$

d'où le résultat final

$$\frac{\partial E(Y_1 Y_2)}{\partial E(X_1 X_2)} = E\left[\frac{\partial Y_1}{\partial X_1} \frac{\partial Y_2}{\partial X_2}\right].$$

Avec un raisonnement similaire, on montrerait que

$$\frac{\partial^{(k)} E(Y_1 Y_2)}{\partial E(X_1 X_2)^{(k)}} = E\left[\frac{\partial^{(k)} Y_1}{\partial X_1^{(k)}} \frac{\partial^{(k)} Y_2}{\partial X_2^{(k)}}\right],$$

où $^{(k)}$ désigne la dérivée kème.

References

- [1] M. B. Priestley, *Spectral Analysis and Time Series*. New-York, USA: Academic Press, 1981.
- [2] A. M. Yaglom, *An Introduction to the Theory of Stationary Random Functions*. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice Hall, 1962.
- [3] B. Solaiman, *Processus stochastiques pour l'ingénieur*. Lausanne, Switzerland: Presses polytechniques et universitaires romandes, 2006.