Signaux Aléatoires

Stationnarité et Ergodicité

Jean-Yves Tourneret[1]

(1) University of Toulouse, ENSEEIHT-IRIT-TéSA
jyt@n7.fr

Année $2023 - 2024$

Bibliographie

Quelques références

- A. Papoulis and S. U. Pillai, Probability, Random Variable and Stochastic Processes, McGraw Hill Higher Education, 4th edition, 2002.
- A. Ruegg, Processus Stochastiques, Presses Polytechniques Romandes, Switzerland, 1989.

Signaux aléatoires stationnaires

Définition

- Moyenne : $E[x(t)]$ indépendant de t
- Moment d'ordre 2 : $E[x(t)x^*(t-\tau)]$ indépendant de t

Corrélations

- Fonction d'autocorrélation

$$R_x(\tau) = E[x(t)x^*(t-\tau)] = \langle x(t), x(t-\tau)\rangle$$

- Fonction d'intercorrélation

$$E[x(t)y^*(t-\tau)] = \langle x(t), y(t-\tau)\rangle$$

- Produit Scalaire

$$\langle x(t), y(t)\rangle = E[x(t)y^*(t)]$$

Remarques

- stationnarité au sens strict, au sens large, à l'ordre deux
- tests de stationnarité

Stationnaire ou non ?

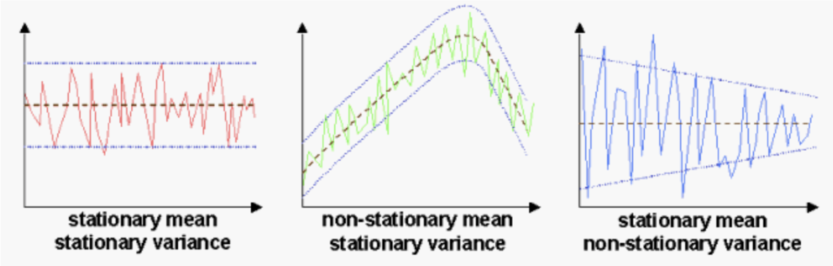

Figure 2: Constancy in mean and variance.

https://towardsdatascience.com/stationarity-in-time-series-analysis-90c94f27322

Densité spectrale de puissance

- Puissance moyenne

$$P = R_x(0) = E\left[|x(t)|^2\right] = \int_{\mathbb{R}} s_x(f)df$$

- Densité spectrale de puissance
  - Définition

$$s_x(f) = \mathrm{TF}\left[R_x(\tau)\right]$$

  - Propriété

$$s_x(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} E\left[|X_T(f)|^2\right]$$

avec

$$X_T(f) = \int_{-T/2}^{T/2} x(t)\exp(-j2\pi ft)dt$$

mais en général la transformée de Fourier d'un signal aléatoire n'existe pas !

Exemples

- Sinusoide

$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \theta)$$

θ va uniforme sur $]0, 2\pi[$, A et f_0 constantes

  - Fonction d'autocorrélation

$$R_x(\tau) = \frac{A^2}{2}\cos(2\pi f_0 \tau)$$

  - Densité spectrale de puissance

$$s_x(f) = \frac{A^2}{4}\left[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)\right]$$

- Bruit blanc
  - Fonction d'autocorrélation

$$R_x(\tau) = \frac{N_0}{2}\delta(\tau)$$

  - Densité spectrale de puissance

$$s_x(f) = \frac{N_0}{2}$$

- Autres exemples : Voir polycopié

Propriétés

Fonction d'autocorrélation

- **Symétrie Hermitienne**

$$R_x^*(-\tau) = R_x(\tau)$$

- **Valeur maximale**

$$|R_x(\tau)| \leq R_x(0)$$

- **Distance entre $x(t)$ et $x(t-\tau)$** : si $x(t)$ est un signal réel

$$d^2\left[x(t), x(t-\tau)\right] = 2\left[R_x(0) - R_x(\tau)\right]$$

  Donc $R_x(\tau)$ mesure le lien entre $x(t)$ et $x(t-\tau)$.

- **Décomposition de Lebesgue** : dans la quasi-totalité des applications, on a

$$R_x(\tau) = R_1(\tau) + R_2(\tau)$$

  où $R_1(\tau)$ est une somme de fonctions périodiques et $R_2(\tau)$ tend vers 0 lorsque $\tau \to \infty$.

Propriétés

Densité spectrale de puissance (DSP)

- DSP réelle

$$s_x(f) \in \mathbb{R}$$

De plus, si $x(t)$ signal réel, $s_x(f)$ réelle paire

- Positivité

$$s_x(f) \geq 0$$

- Lien entre DSP et puissance moyenne

$$P = R_x(0) = \int_{\mathbb{R}} s_x(f) df$$

- Décomposition (spectres discret et continu) : dans la quasi-totalité des applications, on a

$$s_x(f) = s_1(f) + s_2(f)$$

où $s_1(f)$ est un spectre de raies et $s_2(f)$ un spectre continu (cas général : partie singulière).

Signaux aléatoires ergodiques

Définition

On dit qu'un processus aléatoire stationnaire $x(t)$ est ergodique au premier ordre si

$$m_T = \frac{1}{T}\int_0^T x(u)du \underset{T\to+\infty}{\xrightarrow{\text{mq}}} E\left[x(t)\right]$$

Remarques

- Convergence en moyenne quadratique

$$m_T \underset{T\to+\infty}{\xrightarrow{\text{mq}}} E\left[x(t)\right] = m \Leftrightarrow \lim_{T\to\infty} E\left[(m_T - m)^2\right] = 0.$$

- Lien entre stationnarité et ergodicité
  Ergodicité $\Rightarrow$ Stationnarité mais Stationnarité $\nRightarrow$ Ergodicité
- moyenne statistique $=$ moyenne temporelle

Exemples

- Secteur

$$x(t) = \cos\left(2\pi f_0 t + \theta\right)$$

avec $f_0 = 50Hz$ et θ uniformément répartie sur $]0, 2\pi[$.

- Carré du secteur

$$y(t) = A\cos^2\left(2\pi f_0 t + \theta\right) = A\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\left(4\pi f_0 t + 2\theta\right)\right]$$

où θ est une variable aléatoire uniformément répartie sur $]0, 2\pi[$ et A une variable aléatoire de moyenne m et de variance $\sigma^2 > 0$.

Théorème

Énoncé

Pour un processus aléatoire stationnaire au sens large $x(t)$ de moyenne $E\left[x(t)\right] = m$, de fonction d'autocorrélation $R_x\left(\tau\right) = E\left[x(t)x^*\left(t-\tau\right)\right]$ et de densité spectrale de puissance $s_x(f) = TF\left[R_x\left(\tau\right)\right]$, on a

$$\boxed{m_T = \frac{1}{T}\int_0^T x(u)du \underset{T\rightarrow+\infty}{\xrightarrow{\text{mq}}} m \Leftrightarrow \Delta S_x\left(0\right) = \left|m\right|^2} \tag{1}$$

avec $\Delta S_x\left(0\right) = S_x\left(0^+\right) - S_x\left(0^-\right)$ et $s_x\left(f\right) = \frac{dS_x(f)}{df}$.

Preuve

http://perso.tesa.prd.fr/jyt/SignalProcessing/Notes_cours2021

Applications du théorème

Exemples

- Secteur

$$x(t) = \cos\left(2\pi f_0 t + \theta\right)$$

avec $f_0 = 50Hz$ et θ uniformément répartie sur $]0, 2\pi[$.

- Carré du secteur

$$y(t) = A\cos^2\left(2\pi f_0 t + \theta\right) = A\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\left(4\pi f_0 t + 2\theta\right)\right]$$

où θ est une variable aléatoire uniformément répartie sur $]0, 2\pi[$ et A une variable aléatoire de moyenne m et de variance $\sigma^2 > 0$.

Résultats intéressants

Énoncés

- Un signal aléatoire $x(t)$ est ergodique au premier ordre si et seulement si

$$\frac{1}{T}\int_0^T c(\tau)d\tau \underset{T\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

où $c(\tau) = E[x(t)x^*(t-\tau)] - |m|^2$ est l'autocovariance de $x(t)$ (Preuve : livre de Papoulis).

- Condition suffisante d'ergodicité au premier ordre : si $c(\tau) \underset{\tau\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors $x(t)$ est ergodique au premier ordre (Preuve : voir livre Papoulis).

Preuves

Voir livre de Papoulis

Que faut-il savoir ?

- Ce qu'est un signal aléatoire stationnaire
- Déterminer la fonction d'autocorrélation et la densité spectrale de puissance d'un signal aléatoire stationnaire
- Ce qu'est un signal aléatoire ergodique
- Démontrer qu'un signal aléatoire est ergodique à l'aide du théorème