

# Signaux Aléatoires

## Filtre adapté (Matched Filter)

Jean-Yves Tournet<sup>(1)</sup>

(1) University of Toulouse, ENSEEIHT-IRIT-TéSA  
[jyt@n7.fr](mailto:jyt@n7.fr)

Année 2023 – 2024

## Bibliographie

### Quelques références

- ▶ **A. Papoulis and S. U. Pillai**, **Probability, Random Variable and Stochastic Processes**, McGraw Hill Higher Education, 4th edition, 2002.
- ▶ **B. Picinbono**, **Random Signals and Systems**, Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1993.

## Filtrage linéaire des signaux aléatoires

### Définition

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{\mathbb{R}} x(s)h(t-s)ds = \int_{\mathbb{R}} h(s)x(t-s)ds = h(t) * x(t).$$

où les intégrales sont définies au sens de la convergence en moyenne quadratique. On notera  $H(f) = \text{TF}\{h(t)\}$  la transmittance du filtre.

### Propriétés (voir poly pour preuves)

- ▶ **Densité spectrale de puissance** et **Fonction d'autocorrélation**

$$s_y(f) = s_x(f)|H(f)|^2, \quad R_y(\tau) = R_x(\tau) * h(\tau) * h^*(-\tau)$$

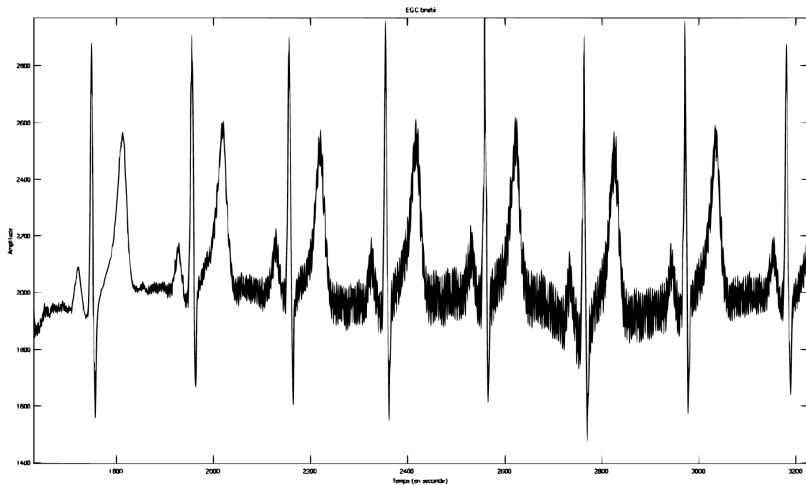
- ▶ **Fonction d'intercorrélation**

$$R_{yx}(\tau) = R_x(\tau) * h(\tau)$$

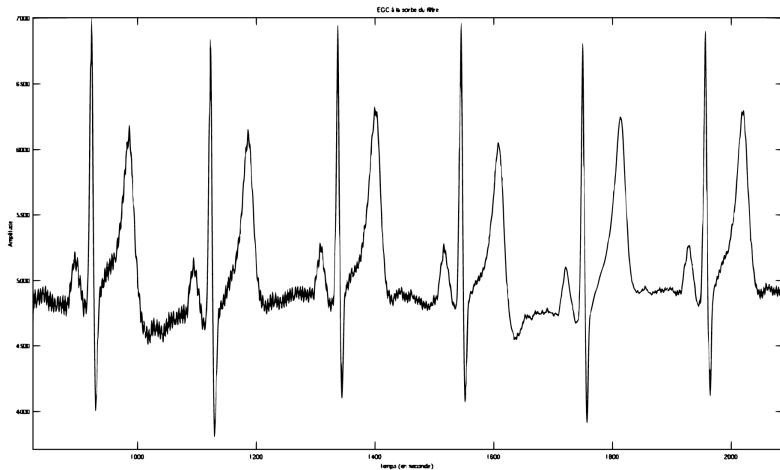
- ▶ **Moyenne**

$$E[y(t)] = E[x(t)]H(0)$$

## ECG avant filtrage



## ECG après filtrage



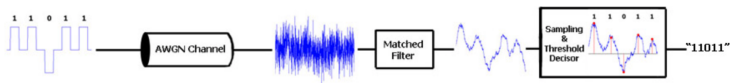
## Filtrage adapté (matched filter)

### Problème

Débruitage de

$$y(t) = s(t) + b(t)$$

lorsque  $s(t)$  est un signal déterministe à énergie finie **connu** et  $b(t)$  est un signal aléatoire **stationnaire** de moyenne nulle et de DSP  $s_b(f)$ .



[https://en.wikipedia.org/wiki/Matched\\_filter](https://en.wikipedia.org/wiki/Matched_filter)

## Filtre adapté

- ▶ Maximisation du rapport signal sur bruit

$$\text{SNR}(t_0) = \frac{y_s^2(t_0)}{E[y_b^2(t_0)]}$$

qui est le rapport des puissances du signal  $y_s(t) = s(t) * h(t)$  et du signal  $y_b(t) = b(t) * h(t)$  à l'instant de décision  $t_0$  (le choix de  $t_0$  sera discuté plus tard),

- ▶ réponse impulsionnelle du filtre adapté

Dans le cas particulier d'un **bruit blanc**, on obtient

$$H(f) = KS^*(f)e^{-j2\pi ft_0} \Leftrightarrow \boxed{h(t) = Ks^*(t_0 - t)}$$

ce qui correspond à une **symétrie par rapport à l'axe oy de  $s(t)$  suivi d'une translation de  $t_0$** .

## Filtre adapté

### Preuve

$$\text{SNR}(t_0) = \frac{y_s^2(t_0)}{E[y_b^2(t_0)]} = \frac{|\int_{\mathbb{R}} H(f)S(f)e^{j2\pi ft_0} df|^2}{\int_{\mathbb{R}} |H(f)|^2 s_b(f) df}$$

► **Numérateur**

$$y_s(t) = \text{TF}^{-1} [S(f)H(f)] = \int_{\mathbb{R}} H(f)S(f)e^{j2\pi ft} df$$

► **Dénominateur**

$$P_{y_n} = E[y_b^2(t_0)] = R_{y_b}(0) = \int_{\mathbb{R}} s_b(f) |H(f)|^2 df$$

► **Ré-écriture**

En introduisant les notations  $u(f) = \sqrt{s_b(f)}H(f)$  et  $v(f) = \frac{S^*(f)}{\sqrt{s_b(f)}}e^{-j2\pi ft_0}$ , on obtient

$$\text{SNR}(t_0) = \frac{|\int_{\mathbb{R}} u(f)v^*(f)df|^2}{\int_{\mathbb{R}} u(f)u^*(f)df}$$



## Filtre adapté

### Preuve

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on obtient

$$\text{SNR}(t_0) \leq \int_{\mathbb{R}} v(f)v^*(f)df$$

avec égalité lorsque

$$u(f) = kv(f) \Leftrightarrow H(f) = k \frac{S^*(f)}{s_b(f)} e^{-j2\pi ft_0}.$$

Dans le cas particulier d'un **bruit blanc**, on obtient

$$H(f) = KS^*(f)e^{-j2\pi ft_0} \Leftrightarrow \boxed{h(t) = Ks^*(t_0 - t)}$$

ce qui correspond à une **symétrie par rapport à l'axe oy de  $s(t)$  suivi d'une translation de  $t_0$** .

## Filtre adapté

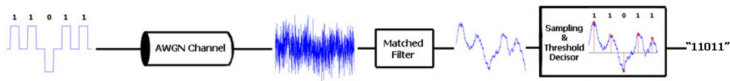
### SNR maximum

$$\text{SNR}(t_0)^{\max} = \int_{\mathbb{R}} v(f)v^*(f)df = \int_{\mathbb{R}} \frac{2}{N_0} |S(f)|^2 df = \frac{2E}{N_0}$$

où  $E$  est l'énergie du signal. On voit donc que le rapport signal à bruit maximal ne dépend pas de la forme du signal mais uniquement de son **énergie**.

### Application

Le filtre adapté est utilisé dans tout récepteur d'un système de **communication numérique**. Dans cette application, on connaît les signaux  $s_0(t)$  et  $s_1(t)$  qui sont utilisés pour la mise en forme des bits "0" et "1".



[https://en.wikipedia.org/wiki/Matched\\_filter](https://en.wikipedia.org/wiki/Matched_filter)

## Que faut-il savoir ?

### Filtrage linéaire et filtrage adapté

- ▶ Relations de Wiener-Lee pour les signaux aléatoires
- ▶ Utilité du filtre adapté
- ▶ Condition d'utilisation du filtre adapté
- ▶ Expressions de la réponse impulsionnelle du filtre adapté et du SNR maximum.
- ▶ Application du filtre adapté aux systèmes de communication numérique.